المعادلات التفاضلية العادية وتحويلات لابلاس

Ordinary Differential Equations and Laplace Transforms

النظريات والمفاهيم .. والتطبيقات العملية

أ. د./ إميـــل شكرالله

٢٠٠٧ م

شكر الله، إميـــل
المعادلات التفاضلية العادية وتحويلات لابلاس **Ordinary Differential Equations** **and Laplace Transforms**
تأليف : أ.د./ إميل صبحي سعد شكرالله، كلية الهندسة الإلكترونية، ج المنوفية
القاهرة : دار النشر للجامعات ـ ط ١ ـ، ٢٠٠٧
٤٨٤ صفحة، مقاس ١٧ × ٢٤ سم
تدمك ١ ـ ١٤٨ - ٣١٦ - ٩٧٧
١ ـ المعادلات التفاضلية
أ ـ العنوان ٥١٥, ٣٥٢

إهداء

إلى أغلى اسم في الوجود

مصـــــــــر



مقدمـــــــــــة

في البداية يمكن القول أن معظم الظواهر الطبيعية في الحيـاة يمكن صياغتها فيزيقياً أو هندسياً بواسطة معادلات رياضيـة. بحيث يكون حل هذه المعـادلات واقعـاً تحت تـأثير بعـض المؤثرات *(Operators)*. فإذا كـانت هـذه المؤثـرات، مؤثـرات تكاملية *(Integral Operators)* فقط ُسميت المعادلة **"معادلة تكاملية"** *(Integral Equation)*. وإذا كان هذا الحل واقعاً تحت تأثير مؤثرات تفاضليـة *(Differential Operators)* **فقط** ُسميت **"معادلة تفاضليـة"** *(Differential Equation)*. فـإذا كـان الحل واقعاً تحت تـأثير مؤثـرات تفاضليـة ومؤثـرات تكاملية معاً سميت المعادلة **"معادلة تكامليـة ـ تفاضليـة"** *(Integro - Differential Equation)*.

هذا، ويوجد الكثير من النظريات التـي تحـول المعـادلات التكاملية إلى معادلات تفاضلية والعكس. بيد أننا سوف نعالج في هذا الكتاب موضوع المعادلات التفاضلية فقـط. علـى أيـة حال دعنا نتفق علـى تعريـف المعادلـة التفاضليـة. فالمعادلـة التفاضلية ُتعرَّف علـى أنهـا المعادلـة التـي تحتـوي حدودهـا علـى المشـتقات *(Derivatives)* أو التفـاضلات *(Differentials)* للدالة (الحل) المطلوب إيجادها.

فـإذا كـانت المعادلـة التفاضليـة تحتـوي علـى المشـتقات أو التفاضلات لدالة في متغير واحد ُسـميت **"معادلة تفاضليـة**

عاديــة" *(Ordinary Differential Equation)*. وإذا كـــانت تحتوي على المشتقات الجزئيـة *(Partial Derivatives)* لدالـة فـي أكـثر مـن متغير سـميت المعادلــة **"معادلـة تفاضليـة جزئيـة"** *(Partial Differential Equation)*.

هذا، ولكل معادلة تفاضلية عاديـة كـانت أم جزئيـة يوجـد مـا يسـمى رتبـة *(Order)* المعادلـة التفاضليـة وكذلـك يوجـد مـا يسمى درجـة *(Degree)* المعادلـة التفاضليـة. فرتبـة المعادلـة التفاضليـة تُعَرَّف علـى أنهـا أعلـى مشـتقة تحتــوي عليهــا المعادلة التفاضلية، أما درجـة المعادلـة التفاضليـة فهـي أس *(Exponent)* أعلى مشتقة تحتوي عليها المعادلـة التفاضليـة.

لتوضيح ذلك، فإن $y' = 3x$ هي معادلة تفاضليـة مـن الرتبـة الأولـى والدرجـة الأولـى. أمـا المعادلـة $(y')^2 = 3x$ فهـي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الثانية. كذلك فإن المعادلة التفاضلية $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ هي معادلة تفاضليـة مــن الرتبةالثالثـــة والدرجـــة الأولـــى. والمعادلـــة $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 7y = 0$ هي معادلة تفاضلية مـن الرتبـة الثالثـة والدرجـة الثانيـة. أمـا بالنسـبة لمعادلـة لابـلاس *(Laplace Equation)* $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$ فهـي معادلـة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

أيضاً فإن المعادلات التفاضلية بصفة عامة تنقسم إلى نوعين أساسيين، النوع الأول هو "المعادلات التفاضليـــــة الخطيــــة" *(Linear Differential Equations)*، والنـــوع الثـــاني هــــو "المعادلات اللاخطية" *(Non-Linear Equations)*.

في الواقع فإنه يقال للمعادلة التفاضلية أنها خطيـــة *(Linear)* إذا كان (1) المتغير التابع *(Dependent Variable)* y مرفوعــاً للأس واحد فقط كما أن كل مشتقاته مرفوعة لـــلأس واحـــد أيضاً. (2) لا يظهر في المعادلة التفاضلية أي حاصل ضـــرب للمتغير التابع y مع أيٍ من مشتقاته ولا يظـــهر أيضـــاً أي حاصل ضرب للمشتقات بعضها مع بعض. فإذا لم يتحقق أيٌّ من الشروط السابقة فإنه يقال أن المعادلة التفاضلية لاخطية *(Non-linear)*. هذا، وهناك أمثلـــة كثـــيرة علـــى الظواهـــر الطبيعية التي تعبر عنها المعادلات التفاضلية العادية. فحركة جسم كتلته m يسقط في الفضاء تحت تأثير وزنه فقط يمكـن أن يُعبر عنها بالمعادلة التفاضلية $m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$ حيث تعـــبر المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dt^2}$ عن العجلة *(Acceleration)* التي يتحرك بها الجسم، بينما تعبر y عن المسافة ويعبر t عن الزمـــــن، وترمز g إلى عجلة الجاذبية الأرضية. أيضاً إذا تحرك جســـم

حركة توافقية بسيطة *(Simple Harmonic Motion)* فيمكن أن يُعبر عن هذا بالمعادلة التفاضلية $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$. وهكذا ...

على أية حال فهـذا الكتـاب سـوف يبحـث فـي حـل المعـادلات التفاضلية العادية. وسوف تتركز الدراسة على ثلاثة محـاور رئيسـية. المحــور الأول يبحــث عــن الحلــول التحليليــة *(Analytic Solution)* أو التي تسمى أيضاً الحلول المضبوطـة *(Exact Solutions)*، المحـور الثـاني يبحـث فـي طـرق إيجـاد الحلـول التقريبيـة *(Approximate Solutions)*، أمـا المحـور الثالث فيبحث عن الحلول العددية *(Numerical Solutions)*.

الباب الأول يتعامل مع معادلات الرتبة الأولـى. فنقـدم طـرق حل حوالي تسعة أنواع مختلفـة مـن معـادلات الرتبـة الأولـى الخطية واللاخطية. كما نقدم أيضاً في الفصل العاشر من هذا الباب طريقة بيكارد التكرارية *(Picard Iteration Technique)* لحل المسائل الابتدائية *(Initial Value Problems)*.

ثـم ننتقـل إلـى معـادلات الرتبـة الثانيـة والرتـب الأعلـى، ذات المعاملات الثابتة وذات المعاملات المتغيرة، المتجانسة وغير المتجانسة. حيث ندرس في البـاب الثـاني المعـادلات الخطيـة ذات المعاملات الثابتة فقـط. فنقـدم طريقـة المعادلـة المميزة *(Indicial Equation)* لحـل المعـادلات المتجانسـة. كمـا نقـدم ثلاث طرق لإيجاد الحل الخـاص للمعـادلات غـير المتجانسـة.

الطريقـة الأولـى تسـمى طريقـة مقارنـة المعـاملات *(Undetermined Coefficients)*، والثانية تسمى طريقـة تغيير البـارامترات *(Variation of Parameters)*، والطريقـة الثالثـة هـي طريقـة هيفيسـايد *(Heaviside Method)* أو مـا يسـمى بطريقـة المؤثـرات التفاضليـة. فـي البـاب الثـالث نـدرس المعادلات الخطية من الرتبة الثانية ذات المعـاملات المتغيرة وبـالأخص معـادلات أويـلر *(Euler Equations)*. فـي البـاب الرابع ندرس المعادلات الخطية من الرتـب العليـا المتجانسـة وغـير المتجانسـة ذات المعـاملات الثابتـة وذات المعـاملات المتغيرة. أما في الباب الخامس فنقدم طريقتين لحـل أنظمـة المعـادلات التفاضليـة الخطيـة. الطريقـة الأولـى تسـتخدم المؤثرات التفاضلية، والطريقة الثانية تسـتخدم مفـاهيم القيـم المميـزة *(Eigenvalues)* والمتجهـات المميـزة *(Eigenvectors)* ومفهـوم قابليـة المصفوفـة لأن تكـون قطريـة *(Diagonalization)*.

ثم ننتقل إلى الأبواب السادس، والسابع، والثامن حيث نقـدم تحويلات لابـلاس *(Laplace Transforms)* وقواعدهـا وطـرق الحصـول عليهـا لكثـير مـن الـدوال وكذلـك الشـروط الواجـب توافرها لإتمام ذلك. أيضاً ندرس تحويـلات لابـلاس العكسـية ونقـدم عـدد 6 طـرق للحصـول عليهـا. كمـا نقـدم تطبيقـات

تحويـلات لابـلاس وتحويـلات لابـلاس العكسـية فـي حـل المعـادلات التفاضليـة. وعلـى الأخـص تلـك المعـادلات التـي تكون فيها دالة الهدف على شكل نبضات *(Pulses)* أو دوال إزاحيـة *(Shifted Functions)* أو دوال متصلـة علـى فـترات *(Pieswise Continuous)* والتي لايمكن الحصول على حلولها باستخدام الطرق التقليدية المعطاة في الأبواب السابقة.

الآن مـاذا نفعل إذا تعذر الحصـول علـى حلـول المعـادلات التفاضليـة باسـتخدام الطـرق التقليديـة أو تحويـلات لابـلاس؟ الإجابة عن هذا السؤال تدفعنا في اتجاه البحـث عـن الحلـول التقريبية. هذا هو موضوع الباب التاسـع حيث نقـدم طريقـة متسلسلات القـوى للحصـول علـى حلـول متسلسـلات القـوى *(Power Series Solutions)*. وعندمـا لايكـون مـن الضـروري الحصول على حل المعادلة التفاضلية على طول فترة تعريفها بل عند نقطة معينة محددة مسبقاً تكون الحاجة إلى نوع آخر من الحلول التقريبية التي توفـر الوقت والجهد. هذا النـوع من الحلول يسمى بـالحلول العدديـة *(Numerical Solutions)* وهو موضوع الباب العاشر من هذا الكتاب. هذا، وقد روعي في هذا الكتاب التسلسل المنطقي لتتابع موضوعاتـه، علاوةً على تميزه بالشـرح التفصيلـي والمبسـط فـي آنٍ واحد. لـذا يمكن اعتبار الكتاب بمثابة منهج وافي للمعـادلات التفاضليـة

العاديــة. وهــو نــافع لطلبــة كليـــات الهندســـة، والعلـــوم والحاسبات. والكتاب مدعم بعدد كبير من الأمثلـة المحلولـة، وكذلـك حلـول المســائل ذات الأرقـام الفرديـة. أرجـو اللـــه أن يبارك هذا الجهد من أجل فائدة كل من يهتم بدراسة موضوع هذا الكتاب، والله الموفق.

أ. د. / إمـــيل شكرالله

أغسطس 2001

المحتوى العلمي للكتاب

الباب
1

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى
First Order Differential Equations

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تُعرَف على أنها المعادلة التي تأخذ الشكل $F(x, y, y') = 0$. وهذه المعادلة تظهر في أشكال كثيرة ومتنوعة؛ خطية *(Linear)* وغير خطية *(Non Linear)* من الدرجة الأولى أو من أية درجة أخرى. ويكون حل هذه المعادلة هو المتغير التابع y الذي يحقق المعادلة التفاضلية. على أية حال، ليس من الضروري أن يوجد دائماً للمعادلة من الرتبة الأولى حل. فمثلاً المعادلة $(y')^2 + y^2 = -2$ ليس لها حل على الإطلاق. لذلك يكون من الضروري الإشارة إلى حقيقة عدم وجود أية نظرية تثبت وجود وحدانية *(Existence and Uniquence Theorem)* حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى. لكن في مقابل ذلك توجد نظرية بيكارد *(Picard Theorem)*، والتي تثبت وجود وحدانية الحل لمعادلات الرتبة الأولى التي تحقق بعض الشروط الابتدائية مثل مسألة كوشي الابتدائية *(Cauchy Problem)* ـ كما سنرى. فإذا لم تكن هناك أية شروط كان الحل العام لانهائياً نظراً لوجود ثابت اختياري. انطلاقاً من هذه الحقيقة يجب اعتبار معادلات الرتبة الأولى أنواعاً مختلفة والتعامل مع كل نوع على حدة.

هذا، وسوف ندرس من معادلات الرتبة الأولى معادلات تسمى "**معادلات انفصالية**" *(Separable)*، وهي تلك المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات، كما توجد أنواع من المعادلات تسمى "**معادلات متجانسة**" *(Homogeneous)*، وأنواع أخرى تسمى "**شبه متجانسة**" *(Nearly Homogeneous)*، كما توجد معادلات تسمى "**معادلات مضبوطة**" *(Exact)*. ومن معادلات الرتبة الأولى أيضاً توجد معادلات تسمى "**معادلات خطية**" *(Linear)*، وهذه التسمية هنا تختلف عن معنى الخطية الذي قدمناه في المقدمة. توجد كذلك "**معادلات برنولي**" *(Bernoulli Equation)* و"**معادلات ريكاتي**" *(Riccati Equation)*، وأخيراً طريقة بيكارد التكرارية لحل المسائل الابتدائية.

1.1 مقدمة

الحل العام *(General Solution)* للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى $F(x,y,y')=0$ يُعرَف على أنه الدالة $y=f(x)+c$ التي تحقق المعادلة $F(x,y,y')=0$، حيث الثابت c هو أي عدد حقيقي. ماذا يعني هذا الكلام؟ يعني أن الحل العام يمكن الحصول عليه بفك الارتباط الرياضي بين المتغيرين x, y

والمشتقة الأولى y' للحصول على المتغير y كدالة في المتغير x. وعمومية الحل هنا ترجع إلى وجود الثابت c وهو بالطبع ناتج من جراء فك الارتباط عن طريق إجراء عملية التكامل، ولذا فهو يسمى أيضاً ثابت التكامل، وإذا تم معرفة قيمة العدد c من الشروط الابتدائية المعطاة ُسمى الحل عندئذٍ بالحل الخاص *(Particular Solution)*. أي أنه يمكن القول أن الحل الخاص هو حالة خاصة من الحل العام. وتقول إحدى النظريات أن عدد البارامترات c يساوي رتبة المعادلة التفاضلية. فإذا كانت المعادلة التفاضلية من الرتبة n فإن الحل العام لهذه المعادلة يحتوي على عدد n من البارامترات أو الثوابت $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ كلهم مستقلون خطياً. وقد ُسمي العدد c بارامتراً *(Parameter)*، وذلك لأن قيمته تكون ثابتة *(Constant)*تحت شروط ابتدائية معينة فإذا تغيرت الشروط تغيرت قيمته.

مثال 1.1 اثبت أن

$$y = cx + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{(i)}$$

هوالحل العام للمعادلة

$$y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad \text{(ii)}$$

الحل بتفاضل y كما في (i) بالنسبة إلى x نحصل على

$$y' = c \qquad \text{(iii)}$$

بالتعويض من (i), (iii) في (ii) نحصل على

$$cx + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - xc = \frac{c}{\sqrt{1+(c)^2}} \to \frac{c}{\sqrt{1+(c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+(c)^2}}$$

الأمر الذي يعني أن $y = cx + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ يحقق المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي فهو حل عام لها.

✍.

1.2 المعادلات التفاضلية التي يمكن فصل متغيراتها
Separable Equations

يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى والتي على الشكل

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1.1)$$

أنها معادلة تفاضلية انفصالية من الرتبة الأولى إذا أمكن وضعها على الصورة

$$A(x)dx = B(y)dy \qquad (1.2)$$

حيث يمكن في هذه الحالة إجراء عملية التكامل لطرفي المعادلة (1.2) بسهولة للحصول على الحل العام $y = f(x) + c$.

مثال 1.2 أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2(y+2)$$

الحل هذه معادلة تفاضلية انفصالية من الرتبة الأولى. بفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dy}{y+2} = (3x^2)dx$$

وبإجراء عملية التكامل نجد أن

$$\int \frac{1}{y+2}dy = \int 3x^2 dx + c$$

إذاً الحل العام هو

$$\ln|y+2| = x^3 + c$$

✍.

مثال 1.3 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x\frac{dy}{dx} = 2y\ln(x)$$

الحل هذه معادلة تفاضلية انفصالية من الرتبة الأولى. بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\frac{dy}{2y} = \frac{\ln(x)dx}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{\ln(x)}{x}dx + \ln(c)$$

حيث تم وضع ثابت التكامل على الشكل $\ln(c)$، وذلك لتسهيل الحسابات، حيث c بالطبع قيمة ثابتة، إذاً

$$\frac{1}{2}\ln(y) = \frac{(\ln(x))^2}{2} + \ln(c) \quad \rightarrow \quad \ln(y) = (\ln(x))^2 + \ln(c^2)$$

وهكذا نجد أن

$$\ln\left(\frac{y}{c^2}\right) = (\ln(x))^2 \quad \rightarrow \quad \frac{y}{c^2} = e^{(\ln(x))^2}$$

إذاً الحل العام هو

$$y = c^2 e^{(\ln(x))^2}$$

✍.

مثال 1.4 أوجد الحل العام للمعادلة

$$(xy^2 - x)dx + (x^2y + y)dy = 0$$

الحل هذه معادلة تفاضلية انفصالية من الرتبة الأولى. بفصل المتغيرات نجد أن

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$$

أو

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)}dx+\frac{y}{\left(y^2-1\right)}dy=0$$

وبالتكامل، إذاً

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\left(x^2+1\right)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2y}{\left(y^2-1\right)}dy=\ln(c)$$

أو

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(y^2-1\right)=\ln(c)$$

إذاً

$$\ln\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)=\ln\left(c^2\right)\;\rightarrow\;\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)=\left(c^2\right)$$

وبالتالي فالحل العام هو

$$y=\sqrt{\frac{c^2}{\left(x^2+1\right)}+1}$$

✍.

مثال 1.5 أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{|xy|}{xy}$$

الحل هذه معادلة تفاضلية انفصالية من الرتبة الأولى. نعيد ـ أولا ـ صياغة المعادلة في الشكل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{|xy|}{xy}=\begin{cases}1 \ ; \ xy>0\\ -1 \ ; \ xy<0\end{cases}$$

وهكذا نجد أن المعادلة التفاضلية المعطاة تحولت إلى معادلتين انفصاليتين من الرتبة الأولى، هما على الترتيب

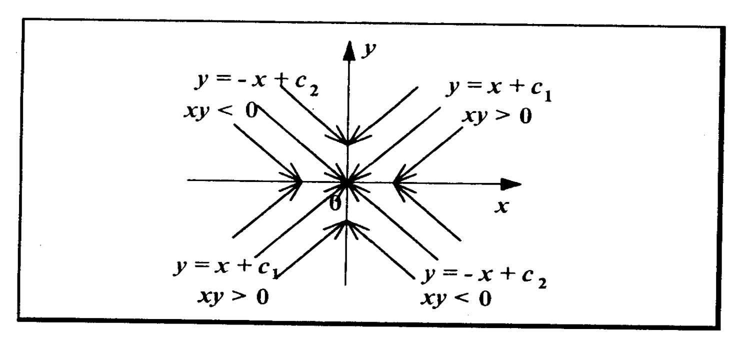
$$\frac{dy}{dx}=1 \ ; \ xy>0 \quad , \quad \frac{dy}{dx}=-1 \ ; \ xy<0$$

بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$y=x+c_1 \ ; \ xy>0 \quad , \quad y=-x+c_2 \ ; \ xy<0$$

حيث c_1, c_2 ثوابت. هذا، ويبين شكل (1.1) الحل العام في المستوى – xy.

شكل 1.1



.✍

1.3 المعادلات التفاضلية المتجانسة

Homogeneous Equations

يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى، التي على الشكل $F(x,y,y')=0$ أنها معادلة تفاضلية متجانسة إذا أمكن وضعها على الصورة

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1.3}$$

حيث $P(x,y)\&Q(x,y)$ هي دوال متجانسة من نفس الدرجة. لاحظ أنه يقال للدالة $f(x,y)$ أنها دالة متجانسة من درجة n إذا حققت الشرط

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \quad \forall\, t>0 \tag{1.4}$$

وبعد التأكد من أن المعادلة التفاضلية هي معادلة متجانسة نستخدم بعض التعويضات الرياضية مثل

$$y=vx,\quad dy=vdx+xdv \tag{1.5}$$

وهكذا تتحول المعادلة المتجانسة إلى معادلة من النوع الذي يتم فيه فصل المتغيرات، ثم نجري بعد ذلك عملية التكامل للحصول على الحل العام.

مثال 1.6 أوجد الحل العام للمعادلة

$$\left(y^2-xy\right)dx+x^2dy=0$$

الحل في هذه المعادلة نلاحظ أنه لايمكن فصل المتغيرات. على كل حال، فإن الدالتين $P(x,y),\ Q(x,y)$ هما دالتان متجانستان من الدرجة الثانية، وذلك لأن

$$P(tx,ty)=(ty)^2-(tx)(ty)=t^2\left(y^2-xy\right)=t^2P(x,y)$$

كما أن

$$Q(tx,ty)=(tx)^2=t^2x^2=t^2Q(x,y)$$

إذاً المعادلة التفاضلية المعطاة هي معادلة تفاضلية متجانسة. وبالتالي نستخدم التعويض (1.5) فتتحول المعادلة المعطاة إلى

$$\left((vx)^2-x(vx)\right)dx+x^2(vdx+xdv)=0$$

أو

$$x^2\left(v^2-v\right)dx+x^2(vdx+xdv)=0$$

بالقسمة على x^2، والاختصار نحصل على

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1}{v^2}dv=0$$

بإجراء التكامل نحصل على

$$\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{v^2}dv=c\quad\rightarrow\quad\ln|x|-\frac{1}{v}=\ln(c)$$

وبالعودة إلى التعويض

$$y = vx \rightarrow v = \frac{y}{x}$$

نجد أن

$$\ln|x| - \frac{1}{\frac{y}{x}} = \ln(c) \rightarrow \ln|x| - \frac{x}{y} = \ln(c) \rightarrow \ln\left|\frac{x}{c}\right| = \frac{x}{y}$$

وهكذا نحصل على الحل العام من المعادلة

$$|x| = ce^{\frac{x}{y}}$$

✍.

مثال 1.7 أوجد الحل العام للمعادلة

$$xdy - \left(\sqrt{y^2 + x^2} + y\right)dx = 0$$

الحل بما أن

$$P(x,y) = x \rightarrow P(tx,ty) = tx = tP(x,y)$$

وبما أن

$$Q(x,y) = -\left(\sqrt{y^2 + x^2} + y\right)$$

$$Q(tx,ty) = -\left(\sqrt{t^2y^2 + t^2x^2} + ty\right)$$

$$= t\left[-\left(\sqrt{y^2 + x^2} + y\right)\right] = tQ(x,y)$$

إذاً فالدالتان $P(x,y),\ Q(x,y)$ متجانستان من الدرجة الأولى وبالتالي فالمعادلة المعطاة تكون متجانسة. نضع

$$x = vy \quad , \quad dx = vdy + ydv$$

في المعادلة المعطاة فنحصل على

$$vydy - \left(\sqrt{v^2y^2 + y^2} + y\right)(vdy + ydv) = 0$$

وبعد الاختصار نجد أن

$$-vy\sqrt{v^2+1}\,dy - y^2\left(\sqrt{v^2+1}+1\right)dv = 0$$

وأخيراً فإن

$$-y\left[v\sqrt{v^2+1}\,dy + y\left(\sqrt{v^2+1}+1\right)dv\right] = 0$$

بفرض أن $y \neq 0$. إذاً

$$\left(v\sqrt{v^2+1}\right)dy + y\left(\sqrt{v^2+1}+1\right)dv = 0$$

بفصل المتغيرات، والتكامل، إذاً

$$-\frac{dy}{y} = \frac{\sqrt{v^2+1}+1}{v\sqrt{v^2+1}}dv \Rightarrow -\int\frac{dy}{y} = \int\frac{\sqrt{v^2+1}+1}{v\sqrt{v^2+1}}dv + c$$

أو

$$-\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dv}{v} + \int\frac{1}{v\sqrt{v^2+1}}dv + c$$

إذاً الحل العام نحصل عليه من

$$-\ln|y| = \ln|v| - \operatorname{cosech}^{-1}(v) + c$$

بالعودة إلى التعويض عن $v = \frac{x}{y}$ ، إذاً

$$-\ln|y| = \ln\left|\frac{x}{y}\right| - \operatorname{cosech}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

أو

$$\ln(x(= \operatorname{cosech}^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + C \quad ; \qquad C = -c$$

. ✍

1.4 المعادلات التفاضلية شبه المتجانسة
Nearly Homogeneous Equations

أحياناً توجد معادلات ليست متجانسة ولكن باستخدام بعض الأساليب الرياضية يمكن أن تتحول إلى معادلات متجانسة أو حتى إلى معادلات انفصالية. هذه المعادلات تسمى معادلات شبه متجانسة، وعادة ما تأخذ الشكل

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{b_1 x + b_2 y + b_3}\right) \tag{1.6}$$

حيث $a_i, b_i ;\ i = \overline{1,3}$ ثوابت غير صفرية. طبعاً واضح أنه إذا كان $a_3 = b_3 = 0$ فإن المعادلة تصبح من النوع المتجانس. ولإيجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة لدينا احتمالان. في

الأول تتحول المعادلة شبه المتجانسة إلى معادلة متجانسة، وفي الاحتمال الثانى تتحول المعادلة شبه المتجانسة إلى معادلة انفصالية.

الاحتمال الأول

إذا كان $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. في هذه الحالة يمكن أن تتحول المعادلة شبه المتجانسة إلى معادلة متجانسة، وذلك باستخدام التعويضات

$$x = X + \beta \ , \ y = Y + \gamma \ \ \rightarrow \ \ \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} \tag{1.7}$$

فتأخذ المعادلة (1.6) الشكل

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1(X+\beta) + a_2(Y+\gamma) + a_3}{b_1(X+\beta) + b_2(Y+\gamma) + b_3}\right) \tag{1.8}$$

وبإعادة ترتيب البسط والمقام نجد أن

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + a_2 Y + (a_1\beta + a_2\gamma + a_3)}{b_1 X + b_2 Y + (b_1\beta + b_2\gamma + b_3)}\right) \tag{1.9}$$

واضح الآن أن هذه المعادلة يمكن أن تكون معادلة متجانسة إذا أمكن الحصول على البارامترين β، γ بحيث يكون

$$a_1\beta + a_2\gamma + a_3 = 0, \quad b_1\beta + b_2\gamma + b_3 = 0 \tag{1.10}$$

وفي هذه الحالة تتحول المعادلة الأصلية أي المعادلة شبه المتجانسة إلى المعادلة المتجانسة

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + a_2 Y}{b_1 X + b_2 Y}\right) \tag{1.11}$$

الاحتمال الثاني

إذا كان $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. في هذه الحالة يمكن أن تتحول المعادلة شبه المتجانسة إلى معادلة انفصالية، وذلك باستخدام التعويض

$$v = \frac{a_1 x + a_2 y}{a_1} \tag{1.12}$$

وبالإضافة إلى التعويض (1.12) وبما أن $a_1 b_2 = a_2 b_1$، إذاً يمكن - أيضاً - استخدام التعويض

$$v = \frac{b_1 x + b_2 y}{b_1} \tag{1.13}$$

بتفاضل (1.12) نجد أن

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{a_2}{a_1}\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) \tag{1.14}$$

وبالتعويض من (1.12) في المعادلة الأصلية أي المعادلة شبه المتجانسة فإنها تتحول إلى المعادلة الانفصالية

$$\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = f\left(\frac{a_1 v + a_3}{b_1 v + b_3}\right) \tag{1.15}$$

أو

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{a_2}{a_1} f\left(\frac{a_1 v + a_3}{b_1 v + b_3}\right) \tag{1.16}$$

مثال 1.8 أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x + y - 1}{x - 2}\right)^2$$

الحل هذه المعادلة على الشكل (1.6). أي شبه متجانسة، وبما أن $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 - 1 = -1 \neq 0$. إذاً نستخدم التعويض (1.7) فتتحول المعادلة المعطاة إلى الشكل

$$\frac{dY}{dX} = \left(\frac{2X + Y + (2\beta + \gamma - 1)}{X + (\beta - 2)}\right)^2$$

هذا، وللحصول على قيم β، γ، التي تجعل المعادلة السابقة معادلة متجانسة يتم حل المعادلتين

$$2\beta + \gamma - 1 = 0, \ \beta - 2 = 0$$

فنحصل على

$$\beta = 2, \ \gamma = -3$$

إذاً التعويض المطلوب استخدامه هو

$$x = X + 2, \ y = Y - 3 \ \rightarrow \ X = x - 2, \ Y = y + 3$$

وتأخذ المعادلة المعطاة عندئذٍ الشكل المتجانس

$$\frac{dY}{dX} = \left(\frac{2X+Y}{X}\right)^2$$

أو

$$X^2 dY - (2X+Y)^2 dX = 0$$

وللتأكد من أن هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية متجانسة نبحث الدالتين

$$P(x,y) = X^2, Q(x,y) = -(2X+Y)^2$$

فنجد أنهما دالتان متجانستان. وبالتالي، ولحل هذه المعادلة المتجانسة نستخدم التعويض

$$Y = vX \quad \rightarrow \quad \frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} \quad \rightarrow \quad dY = vdX + Xdv$$

فتتحول المعادلة المتجانسة إلى الشكل

$$X^2(vdX + Xdv) - (2X+vX)^2 dX = 0$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$Xdv = \left((2+v)^2 - v\right)dX \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v^2+3v+4} = \frac{dX}{X}$$

بإجراء التكامل نحصل على

$$\int \frac{dv}{v^2+3v+4} = \int \frac{dX}{X} + c$$

أو

$$\int \frac{dv}{\left(v+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\int \frac{dX}{X}+c$$

أو

$$\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(v+\frac{3}{2}\right)\right)=\ln|X|+c$$

وبما أن

$$X=x-2 \quad , \quad Y=y+3 \rightarrow v=\frac{Y}{X}=\frac{y+3}{x-2}$$

إذاً

$$\ln|x-2|=\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\frac{y+3}{x-2}+\frac{3}{2}\right)\right)-c$$

✍.

مثال 1.9 أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+2}{x-y+3}$$

الحل هذه المعادلة على الشكل (1.6). أي شبه متجانسة، وبما أن $a_1b_2-a_2b_1=-1+1=0$. إذاً نستخدم التعويضات (1.12)، (1.14) فنجد أن

$$v=\frac{a_1x+a_2y}{a_1}=\frac{x-y}{1}=x-y$$

وأيضاً

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = \frac{1}{-1}\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = 1 - \frac{dv}{dx}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$1 - \frac{dv}{dx} = \frac{v+2}{v+3} \rightarrow \frac{dv}{dx} = 1 - \frac{v+2}{v+3} = \frac{1}{v+3}$$

وهذه معادلة يمكن حلها عن طريق فصل المتغيرات، وإجراء التكامل، إذاً يمكن الحصول على

$$\int (v+3)dv = \int dx + c$$

إذاً

$$\frac{v^2}{2} + 3v = x + c$$

وبما أن $v = x - y$. إذاً يمكن الحصول على الحل العام $y(x)$ من المعادلة

$$\frac{(x-y)^2}{2} + 3(x-y) = x + c$$

.✍

مثال 1.10 أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y - 4}$$

الحل هذه المعادلة على الشكل (1.6) أي معادلة شبه متجانسة. بما أن $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 4 - 4 = 0$، إذاً نستخدم التعويضات (1.12)، (1.14) فنجد أن

$$v = \frac{a_1 x + a_2 y}{a_1} = \frac{2x + y}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = \frac{2}{1}\left(\frac{dv}{dx} - 1\right)$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$2\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = \frac{2v - 1}{4v - 4}$$

أو

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2v - 1}{4v - 4}\right) = \frac{10v - 9}{8v - 8}$$

وهذه معادلة يمكن حلها عن طريق فصل المتغيرات، وإجراء التكامل، إذاً يمكن الحصول على

$$\frac{8v - 8}{10v - 9}\,dv = dx \quad \to \quad \int \frac{8v - 8}{10v - 9}\,dv + c = \int dx$$

وبالتالي فإن

$$x = \frac{4v}{5} - \frac{2}{25}\ln|10v - 9| + c$$

وبما أن $v = \frac{2x + y}{2}$. إذاً الحل العام هو

$$x = \frac{4x+2y}{5} - \frac{2}{25}\ln|10x+5y-9| + c$$

✍.

1.5 المعادلات التفاضلية المضبوطة
Exact Equations

نعرج الآن على نوع هام من المعادلات التفاضلية وهو المعادلات المضبوطة. لنعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى والتي على الشكل

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.17}$$

طبعاً يمكن أن نفكر في حل هذه المعادلة على أساس أنها انفصالية. فإذا لم نتمكن من فصل المتغيرات نبحث الدالتين $P(x,y)$ & $Q(x,y)$ من حيث التجانس، فإذا كانتا متجانستين يتم حل المعادلة على أساس أنها معادلة متجانسة. فإن لم تكن المعادلة متجانسة، نعود مرة أخرى إلى الدالتين $P(x,y)$ & $Q(x,y)$. في الحقيقة فإنه إذا حققت المعادلة (1.17) الشرط

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y)\right) \tag{1.18}$$

فإنها تسمى عندئذٍ **"معادلة تفاضلية مضبوطة"**. ماذا يعني علمياً كون المعادلة التفاضلية مضبوطة؟ يعني أنه إذا حققت المعادلة (1.17) الشرط (1.18) فإنه توجد هناك دالة قياسية *(Scalar)* $\phi(x,y)$ تسمى **"دالة الجهد"** *(Potential Function)*، بحيث يكون

$$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x,y)),\ Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(\phi(x,y)) \tag{1.19}$$

وعندئذٍ فإن الحل العام للمعادلة المضبوطة يكون على الشكل

$$\phi(x,y)=c \tag{1.20}$$

حيث c ثابت.

مثال 1.11 أوجد الحل العام للمعادلة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy^3-2}{3x^2y^2+e^y}$$

الحل نضع - أولاً - المعادلة في الشكل

$$\left(2xy^3+2\right)dx+\left(3x^2y^2+e^y\right)dy=0$$

إذاً

$$P(x,y)=\left(2xy^3+2\right),\ Q(x,y)=\left(3x^2y^2+e^y\right)$$

بما أن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3+2\right)=6xy^2$$

وبما أن

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2+e^y\right)=6xy^2$$

إذاً فإن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

وبالتالي فالمعادلة المعطاة مضبوطة. وبما أن الحل العام للمعادلة المضبوطة هو $\phi(x,y)=c$، حيث c ثابت. إذاً نبحث عن الدالة $\phi(x,y)$ بحيث يكون

$$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x,y)),\ Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(\phi(x,y))$$

لنأخذ

$$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)$$

إذاً

$$\left(2xy^3+2\right)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)$$

بفصل المتغيرات، وإجراء التكامل، مع ملاحظة أن ثابت التكامل يجب أن يكون دالة في y ويأخذ الشكل $c(y)$ مثلاً. إذاً فإن

$$\phi(x,y)=\int\left(2xy^3+2\right)dx+c(y)$$

أو

$$\phi(x,y) = x^2y^3 + 2x + c(y)$$

الآن نحاول الحصول على الدالة $c(y)$. بما أن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\phi(x,y)\right) = Q(x,y)$$

إذاً، بتفاضل الدالة $\phi(x,y)$ جزئياً بالنسبة إلى المتغير y، وبمساواة الناتج بالدالة $Q(x,y)$، ومقارنة الطرفين يمكن الحصول على الدالة $c(y)$. بما أن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\phi(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3 + 2x + c(y)\right) = 3x^2y^2 + c'(y)$$

إذاً

$$3x^2y^2 + c'(y) = \left(3x^2y^2 + e^y\right)$$

بمقارنة الطرفين، نجد أن

$$c'(y) = e^y$$

وبتكامل طرفي المعادلة نجد أن

$$\int c'(y)dy = \int e^y dy + a \to \; c(y) = e^y + a$$

حيث a ثابت التكامل. وهكذا نجد أن

$$\phi(x,y) = x^2y^3 + 2x + e^y + a$$

إذاً الحل العام هو

$$x^2y^3 + 2x + e^y = \text{constant}$$

✍.

1.6 تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة مضبوطة باستخدام عامل تكاملي *(Integrating Factor)*

لنعتبر المعادلة التفاضلية

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.21}$$

ولنفرض أن هذه المعادلة ليست مضبوطة، فهل يمكن جعلها معادلة مضبوطة؟ في الحقيقة يمكن جعل هذه المعادلة مضبوطة، وذلك إذا أمكن الحصول على ما يسمى العامل التكاملي μ. كيف؟

إذا ضربت المعادلة غير المضبوطة في عامل تكاملي مناسب فإنها تتحول إلى معادلة مضبوطة. بالطبع فإن العامل التكاملي يمكن أن يكون دالة في المتغير x فقط على الصورة $\mu(x)$، أو دالة في المتغير y فقط على الصورة $\mu(y)$، أو دالة في كلا المتغيرين x، y، أي على الصورة $\mu(x,y)$. انطلاقاً من هذا المعنى نجد أنه إذا ضربت المعادلة غير المضبوطة

(1.21) في العامل التكاملي μ مثلاً فإنها تتحول إلى المعادلة المضبوطة

$$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0 \tag{1.22}$$

ويكون المطلوب الآن هو الحصول على شكل محدد للعامل التكاملي μ. بما أن المعادلة (1.22) هي معادلة مضبوطة. إذاً فإنها تحقق شرط الانضباط

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q(x,y))$$

وبتفاضل الطرفين - جزئياً - نحصل على

$$\mu \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) + P(x,y) \frac{\partial}{\partial y}(\mu)$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) + Q(x,y) \frac{\partial}{\partial x}(\mu) \tag{1.23}$$

الآن لنأخذ الاحتمالين: الاحتمال الأول أن μ دالة في المتغير x فقط أي $\mu = \mu(x)$، والاحتمال الثاني أن μ دالة في المتغير y فقط أي $\mu = \mu(y)$.

الاحتمال الأول نفرض أن العامل التكاملي دالة في المتغير x فقط أي نفرض أن $\mu = \mu(x)$. إذاً

$$\mu = \mu(x) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)) = 0$$

بالتعويض في (1.23) نجد أن

$$\mu(x)\ \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \mu(x)$$

أو

$$\boxed{\frac{1}{Q(x, y)}\left(\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)\right) = \frac{1}{\mu(x)} \frac{\partial}{\partial x} \mu(x)} \qquad (1.24)$$

بحل المعادلة التفاضلية (1.24) يمكن الحصول على شكل صريح للعامل التكاملي $\mu(x)$، والذي يجعل المعادلة (1.22) مضبوطة.

الاحتمال الثاني

نفرض أن العامل التكاملي دالة في المتغير y فقط أي نفرض أن $\mu = \mu(y)$. إذاً

$$\mu = \mu(y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \mu(y) = 0$$

بالتعويض في المعادلة (1.23) نجد أن

$$\mu(y) \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) + P(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \mu(y) = \mu(y) \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$$

أو

$$\boxed{\frac{1}{P(x, y)}\left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y)\right) = \frac{1}{\mu(y)} \frac{\partial}{\partial y} \mu(y)} \qquad (1.25)$$

بحل المعادلة التفاضلية (1.25) يمكن الحصول على شكل صريح للعامل التكاملي $\mu(y)$، والذي يجعل المعادلة (1.22) مضبوطة.

ملاحظة يمكن أيضاً أن يكون العامل التكاملي على الشكل $\mu = x^a y^b$ حيث a, b ثوابت. وباتباع نفس الخطوات السابقة يمكن تحديد هذا العامل الذي يجعل المعادلة مضبوطة.

مثال 1.12 أوجد الحل العام للمعادلة

$$2y - e^x + x\frac{dy}{dx} = 0$$

الحل يمكن إعادة كتابة المعادلة لتأخذ الشكل

$$\left(2y - e^x\right)dx + xdy = 0$$

حيث نجد أن

$$P(x, y) = \left(2y - e^x\right), \quad Q(x, y) = x$$

وبما أن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = 2 \neq \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = 1$$

إذاً فالمعادلة المعطاة ليست مضبوطة. على أية حال يمكن جعلها معادلة مضبوطة، وذلك بضربها في العامل التكاملي

$\mu(x)$ مثلاً. هذا، فللحصول على قيمة العامل $\mu(x)$ نستخدم المعادلة (1.24)، حيث نجد أن

$$\frac{1}{x}(2-1)=\frac{1}{\mu(x)}\frac{d}{dx}\mu(x)$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\int \frac{1}{x}dx+\ln(c)=\int\frac{1}{\mu(x)}d\mu(x)$$

حيث $\ln(c)$ هو ثابت التكامل. إذاً

$$\ln|cx|=\ln|\mu| \quad \rightarrow \quad \mu=cx$$

الآن بضرب المعادلة المعطاة في x تصبح معادلة مضبوطة وتأخذ الشكل

$$\left(2yx-xe^{x}\right)dx+x^{2}dy=0$$

حيث نجد أن الدالتين $P(x,y),\ Q(x,y)$ لهذه المعادلة المضبوطة هما ـ على الترتيب ـ:

$$P(x,y)=2xy-xe^{x},\quad Q(x,y)=x^{2}$$

لاحظ أنه تم ضرب المعادلة المعطاة في العامل x فقط وليس cx، وذلك لأن الضرب في مقدار ثابت لطرفي المعادلة لايؤثر في حالة الانضباط للمعادلة. الآن هذه معادلة مضبوطة

(يمكنك التأكد من ذلك). حلها العام هـو $\phi(x,y)=c$، حيث c ثابت. إذاً نبحث عن الدالة $\phi(x,y)$ بحيث يكون

$$2xy - xe^{x} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi(x,y)), \quad x^{2} = \frac{\partial}{\partial y}(\phi(x,y))$$

لنأخذ

$$x^{2} = \frac{\partial}{\partial y}(\phi(x,y))$$

بفصل المتغيرات، والتكامل

$$\phi(x,y) = \int x^{2} dy + c(x) = x^{2} y + c(x)$$

لكن

$$\left(2yx - xe^{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{2} y + c(x)\right) = 2xy + c'(x)$$

من هذه المعادلة، وبمقارنة الطرفين نحصل على

$$c'(x) = -xe^{x}$$

بفصل المتغيرات، والتكامل

$$\int c'(x) dx = -\int xe^{x} dx + a$$

أو

$$c(x) = -e^{x}(x-1) + a$$

حيث a ثابت. وبالتالي فإن

$$\phi(x,y) = \left(yx^{2}\right) - e^{x}(x-1) + a$$

إذاً الحل العام هو

$$\left(yx^2\right) - e^x(x-1) = \text{constant}$$

.✍

1.7 معادلة برنولي التفاضلية من الرتبة الأولى *(Bernoulli Equation)*

تُعرَف معادلة برنولي نسبة إلى عالم الرياضيات السويسري *(Bernoulli , John I, 1667 - 1748)* على أنها

$$P(x)y' + Q(x)y = R(x)y^{\alpha} \tag{1.26}$$

حيث α ثابت لايساوي الصفر أو الواحد الصحيح $(\alpha \neq 0,1)$. فإذا كان $\alpha = 1$ أصبحت المعادلة (1.26) انفصالية، وإذا كانت $\alpha = 0$ سميت المعادلة (1.26) خطية. من الواضح ـ أيضاً ـ أن معادلة برنولي (1.26) ليست مضبوطة (يمكنك التأكد).فهل يمكن جعلها معادلة مضبوطة؟ في الحقيقة يمكن جعل معادلة برنولي مضبوطة، وذلك بإعادة كتابتها في الشكل

$$\left(Q(x)y - R(x)y^{\alpha}\right)dx + P(x)dy = 0$$

ثم ضربها في العامل التكاملي

$$\mu(x,y) = \frac{1}{y^{\alpha}P(x)}e^{(1-\alpha)\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx} \tag{1.27}$$

مثال 1.13 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' + y = y^4$$

الحل هذه المعادلة على شكل معادلة برنولي، حيث

$$P(x) = Q(x) = R(x) = 1 \quad , \quad \alpha = 4$$

من (1.27) نجد أن العامل التكاملي هو

$$\mu(x, y) = \frac{1}{y^4} e^{(1-4)\int dx} = \frac{1}{y^4} e^{-3x}$$

بضرب هذا العامل التكاملي في المعادلة الأصلية، تتحول إلى المعادلة

$$\left(\frac{1}{y^4} e^{-3x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{y^4} e^{-3x}\right)y = \left(\frac{1}{y^4} e^{-3x}\right)y^4$$

أو

$$\left(\frac{1}{y^3} - 1\right)e^{-3x}dx + \left(\frac{1}{y^4} e^{-3x}\right)dy = 0$$

وهذه معادلة مضبوطة. حيث نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{1}{y^3} - 1\right)e^{-3x}\right) = -3y^{-4}e^{-3x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^4} e^{-3x}\right)$$

أي أن

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$$

إذاً الحل العام هو

$$\frac{1}{3}\left(e^{-3x} - e^{-3x}y^{-3}\right) = \text{constant}$$

✍.

1.8 المعادلة الخطية من الرتبة الأولى

Linear Equation of the First Order

تُعَرَف المعادلة الخطية على أنها المعادلة

$$y' + Q(x)y = R(x) \tag{1.28}$$

وهي ـ بالمناسبة ـ حالة خاصة من معادلة برنولي عندما يكون $\alpha = 0,\ P(x) = 1$. من الواضح أن هذه المعادلة ليست معادلة مضبوطة، فهل يمكن جعلها معادلة مضبوطة؟ في الحقيقة يمكن جعل هذه المعادلة مضبوطة بضربها ـ مثلاً ـ في العامل التكاملي

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int Q(x)dx}} \tag{1.29}$$

فنحصل على المعادلة المضبوطة

$$y'\mu(x) + Q(x)y\mu(x) = R(x)\mu(x) \tag{1.30}$$

وكما تعلم فإن هذه المعادلة يمكن حلها كما سبق. على أية حال يمكن الحصول على حل هذه المعادلة المضبوطة، ولكن

بطريقة أخرى. من تعريف المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين نجد أن

$$\frac{d}{dx}[y\mu(x)] = \frac{d}{dx}\left[ye^{\int Q(x)dx}\right] = y'e^{\int Q(x)dx}$$

$$+Q(x)ye^{\int Q(x)dx} = y'\mu(x) + Q(x)y\mu(x)$$

إذاً، وبالتعويض في (1.30) نحصل على

$$\frac{d}{dx}[y\mu(x)] = R(x)\mu(x)$$

بإجراء عملية التكامل لطرفي المعادلة نحصل على

$$y\mu(x) = \int R(x)\mu(x)dx + C$$

إذاً الحل العام للمعادلة الخطية (1.28) هو

$$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)}\int R(x)\mu(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}} \tag{1.31}$$

مثال 1.14 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' + y = e^x$$

الحل هذه معادلة خطية حيث $Q(x) = 1,\ R(x) = e^x$. إذاً العامل التكاملي (1.29) هو

$$\mu(x) = e^{\int Q(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

والحل العام (1.31) هو

$$y(x) = e^{-x}\int e^{2x}dx + Ce^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + Ce^{-x}$$

أو

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$$

✍.

1.9 معادلة ريكاتي
Riccati Equation

تُعرف معادلة ريكاتي نسبة إلى عالم الرياضيات الإيطالي *(Riccati, J. F, 1676 - 1754)* على أنها المعادلة

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{1.32}$$

وللحصول على الحل العام $y(x)$ نفرض أن $s(x)$ هو أي حل خاص للمعادلة (1.32). ولنفرض ـ أيضاً ـ أن الحل العام هو

$$\boxed{y(x) = s(x) + \frac{1}{z(x)}} \tag{1.33}$$

حيث الدالة $z(x)$ هي دالة مجهولة سوف نبحث عنها الآن. بالتعويض بالحل العام $y(x)$ من (1.33) في المعادلة (1.32)، نجد أن

$$\left(s(x)+\frac{1}{z(x)}\right)' = P(x)\left(s(x)+\frac{1}{z(x)}\right)^2$$

$$+Q(x)\left(s(x)+\frac{1}{z(x)}\right)+R(x)$$

أو

$$s'(x)-\frac{1}{z^2(x)}z'(x) = P(x)\left(s^2(x)+\frac{1}{z^2(x)}+\frac{2s(x)}{z(x)}\right)$$

$$+Q(x)\left(s(x)+\frac{1}{z(x)}\right)+R(x)$$

وبعد الاختصار نجد أن

$$s'(x)-\frac{1}{z^2(x)}z'(x) = P(x)s^2(x)+Q(x)s(x)+R(x)$$

$$+P(x)\left(\frac{1}{z^2(x)}+\frac{2s(x)}{z(x)}\right)+\frac{Q(x)}{z(x)} \tag{1.34}$$

وبما أن الحل الخاص $s(x)$ هو حل للمعادلة (1.32). إذاً فهو يحققها، وبالتالي يمكن أن نضعه بدلاً من y في المعادلة (1.32) فنجد أن

$$s'(x) = P(x)s^2(x)+Q(x)s(x)+R(x) \tag{1.35}$$

إذاً، بالتعويض من (1.35) في (1.34)، والاختصار نحصل على المعادلة

$$-\frac{1}{z^2(x)}z'(x) = P(x)\left(\frac{1}{z^2(x)} + \frac{2s(x)}{z(x)}\right) + \frac{Q(x)}{z(x)}$$

بالضرب في $-z^2(x)$ نجد أن

$$z'(x) = -P(x) - 2z(x)P(x)s(x) - z(x)Q(x)$$

أو

$$\boxed{z'(x) + [2P(x)s(x) + Q(x)]z(x) = -P(x)} \qquad (1.36)$$

واضح أن المعادلة (1.36) هي معادلة خطية من الرتبة الأولى، بحلها نحصل على $z(x)$. و باختيار الحل الخاص $s(x)$ بطريقة التجربة والخطأ *(Trial and Error)* نحصل على الحل العام في الشكل $y(x) = s(x) + \frac{1}{z(x)}$.

مثال 1.15 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$$

الحل هذه المعادلة على شكل معادلة ريكاتي، حيث

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = -2x, \quad R(x) = x^2 + 1 \qquad \text{(i)}$$

نختر $s(x)=x$ حلاً خاصاً لمعادلة ريكاتي المعطاة. للتأكد من أنه يحققها نعوض به بدلاً من y في فنحصل على

$$x'=x^2-2xx+x^2+1 \;\rightarrow\; 1=1$$

إذاً، فإن $s(x)=x$ هو حل خـاص للمعادلـة المعطـاة، ويكـون الحل العام هو

$$y(x)=s(x)+\frac{1}{z(x)}=x+\frac{1}{z(x)}$$

الآن يمكن الحصول على الدالة $z(x)$ كحـل للمعادلـة الخطيـة (1.36). بالتعويض من (i) في (1.36) نحصل على

$$z'(x)+((2\times 1\times x)-2x)z(x)=-1$$

أو

$$z'(x)=-1$$

بإجراء التكامل، إذاً

$$\int z'(x)dx=-\int dx+c \;\rightarrow\; z(x)=-x+c$$

وبالتالي فإن الحل العام هو

$$y(x)=x+\frac{1}{-x+c}$$

✍.

مثال 1.16 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' = \frac{1}{x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + 1$$

الحل هذه المعادلة على شكل معادلة ريكاتي، حيث

$$P(x) = \frac{1}{x^2} \;,\; Q(x) = -\frac{1}{x} \;,\; R(x) = 1$$

ويمكن التأكد أن $s(x) = x$ هو حل خاص لهذه المعادلة، إذاً الحل العام هو

$$y(x) = s(x) + \frac{1}{z(x)} = x + \frac{1}{z}$$

للحصول على $z(x)$ نجد من (1.36) أن

$$z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2}$$

حيث نجد أن الحل العام لها هو

$$z = e^{-\ln x}\int -\frac{1}{x^2}e^{\ln x}dx + Ce^{-\ln x} = -\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$$

إذاً الحل العام لمعادلة ريكاتي هو

$$y = x + \frac{x}{C - \ln x}$$

✍.

1.10 تكنيك بيكارد التكراري
Picard Iteration Scheme

بدايةً، وقبل التعرف على طريقة بيكارد لحل المسائل الابتدائية دعنا نعرِّف المسألة الابتدائية نفسها. لنفرض I أية فترة، ولنعتبر المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى، والتي على الشكل الذي يسمى **"الشكل المعياري"** *(Normal Form)*

$$y' = f(x, y); \quad x \in I \tag{1.37}$$

لنفرض أن حل المعادلة (1.37) يحقق الشرط الابتدائي أو شرط كوشي *(Cauchy Condition)*

$$y(x_0) = y_0; \quad x_0 \in I \tag{1.38}$$

الذي يعني أن حل المعادلة (1.37) عند $x = x_0$ هو القيمة المعطاة والمعروفة y_0. في الواقع فإن المسألة المكونة من المعادلة التفاضلية (1.37) والشرط الابتدائي (1.38) تسمى **"مسألة قيمة ابتدائية"** أو **"مسألة كوشي"** نسبة إلى عالم الرياضيات والفيزياء الفرنسي المشهور جداً أوغسطين كوشي *(Cauchy A.L, 21/08/1789 - 32/05/1857)*. والسؤال المطروح الآن هو: هل لأية مسألة ابتدائية يوجد حل؟ وهل هذا الحل في حالة وجوده هو حل وحيد؟ النظرية التالية

للعالم الفرنسي المشهور إميل كارل بيكارد (*Picard, K. E., 1856 - 1941*) تجيب عن هذه التساؤلات.

نظرية 1.1 لنفرض أن الدالة $f(x,y)$ الموجودة في المعادلة (1.37)، والمشتقة الأولى لها $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$، هما دالتان متصلتان في المنطقة Ω والتي على شكل مستطيل مركزه النقطة (x_0,y_0) أي في المنطقة

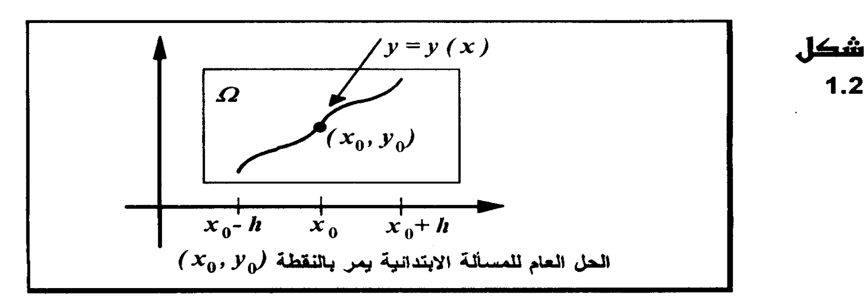
$$\Omega=\{(x,y);\ |x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\};\ a>0,\ b>0 \tag{1.39}$$

ولنفرض أن

$$M=\max_{(x,y)\in\Omega}|f(x,y)|,\quad h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\} \tag{1.40}$$

إذاً يوجد حل وحيد للمسألة الابتدائية (1.38)-(1.37) وذلك لكل x تنتمي إلى الفترة $[x_0-h, x_0+h]$. انظر شكل (1.2).

شكل 1.2



الحل العام للمسألة الابتدائية يمر بالنقطة (x_0, y_0)

بكلمات أخرى

فإن هذه النظرية تثبت أنه يوجد حل وحيد $y(x)$ لمسألة كوشي الابتدائية (1.38) - (1.37).

ولأن الدالتين $f(x,y)$، $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ متصلتان في المنطقة Ω فإن هذا يعني أن الحل يجب أن يمر بالنقطة المعطاة (x_0, y_0)، ويكون معرفاً لكل x ينتمي إلى الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$.

نحاول – الآن – التعرف على **"طريقة بيكارد التكرارية"** *(Picard Iteration Scheme)* لحل المسائل الابتدائية. إن هذه الطريقة تعتمد على الشرط الابتدائي (1.38) باعتباره يُعطي أول قيمة للحل عند x_0 وهي القيمة y_0. فإذا تمت معرفة الحل الابتدائي y_0 يمكن الحصول عندئذٍ على ما يسمى بالحل التكراري الأول ثم الحل الثاني وهكذا، حتى نحصل على متتابعة من الحلول التكرارية، $\{y_i(x)\}_{i=0}^{n}$.

فيكون الحل المطلوب $y(x)$ هو نهاية هذه المتتابعة عندما يقترب العدد n من اللانهاية، الأمر الذي يعني أنه لكي يوجد الحل $y(x)$ يجب أن تتقارب *(Converges)* متتابعة الحلول التكرارية $\{y_i(x)\}_{i=0}^{n}$ إلى $y(x)$ بمعنى أن الحل المطلوب يكون

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) \tag{1.41}$$

للحصول على الحل التكراري، $y_n(x)$، يتم فصل المتغيرات وتكامل طرفي المعادلة (1.37) على الفترة $[x_0, x]$ حيث x يمكن أن تكون أية نقطة تنتمي إلى الفترة $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. إذاً

$$\int_{x_0}^{x} dy(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

أو

$$y(x)\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

وبالتالي فإن

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$$

بالتعويض من الشرط (1.38) نحصل على

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx \tag{1.42}$$

هكذا نجد أن المسألة الابتدائية (1.38)-(1.37) قد تحولت إلى المعادلة التكاملية *(Integral Equation)* (1.42) حيث تقع الدالة المجهولة (الحل) تحت علامة التكامل. الآن، إذا اعتبرنا بداية متتابعة الحلول التكرارية، $y_0(x)$ حلاً للمعادلة

التكاملية (1.42) عندئذٍ يمكن استبدال $y_0(x)$ بالحل $y(x)$ في الطرف الأيمن من (1.42) لنحصل على الحل التكراري الأول

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx$$

وباختيار

$$y_0(x) = y(x_0) = y_0$$

إذاً

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx \tag{1.43}$$

وبنفس التكنيك، فإن

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))dx \tag{1.44}$$

وبالاستمرار نصل إلى أن

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx \tag{1.45}$$

وبالتعويض عن $y_n(x)$ من (1.45) في (1.41) نحصل على الحل المطلوب لكل x تنتمي إلى الفترة الصغيرة المحيطة

بالنقطة x_0، أي نحصل على الحل لكل نقطة تنتمي إلى الفترة $I = [x_0 - h, x_0 + h]$.

مثال 1.17 أوجد الحل العام للمسألة الابتدائية

$$y' = y; \ y(0) = 1; \ a = 1, \ b = 2$$

الحل هذه مسألة ابتدائية على الشكل (1.36). واضح ـ طبعاً ـ أن الدالتين $f(x, y) = y, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 1$، هما دالتان متصلتان في المستطيل Ω الذي مركزه النقطة $(0,1)$ أي المستطيل

$$\Omega = \{(x, y); \ |x - 0| \le 1, \ |y - 1| \le 2\}$$

إذاً فإن المسألة المعطاة تحقق شروط نظرية بيكارد، وبالتالي يوجد لها حل وحيد في الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$. للحصول على h، لدينا من (1.39) أن

$$M = \max_{(x,y) \in \Omega} |f(x, y)| = \max_{-1 \le y \le 3} |y| = 3$$

وبالتالي فإن

$$h = \min\left\{1, \ \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

إذاً فإن حل المسألة الابتدائية المعطاة له وجود لكل x ينتمي إلى الفترة $I = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. أيضاً بما أن $y(0) = 1$، إذاً فإن $x_0 = 0$، $y_0 = 1$. وباستخدام تكنيك بيكارد، نجد من (1.42) أن

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x f(x,1)dx$$

وبما أن

$$f(x,y) = y \rightarrow f(x,1) = 1$$

إذاً

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x dx = 1 + x$$

ومن (1.43) نجد أن

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x f(x, 1+x)dx = 1 + \int_0^x (1+x)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

ومن (1.44) نستمر في الحصول على ...,$y_3(x), y_4(x)$ حتى نحصل على

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

من (1.40) نجد أن الحل المطلوب هو

$$y(x) = \lim_{n\rightarrow\infty} y_n(x) = \lim_{n\rightarrow\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

بالتأكيد فإن أياً من الحلول التكرارية $\{y_i(x)\}_{i=0}^{n}$ يمكن اعتباره حلاً تقريبياً يحمل - بالطبع - مقداراً من الخطأ وليس حلاً مضبوطاً *(Exact)*. على أية حال، فقد أمكن في هذا

المثال ـ وهذا ليس ممكناً دائماً ـ أن نحصل على الحل المضبوط للمسألة المعطاة في الشكل الصريح $y(x) = e^x$.



يمكن حل المعادلة التفاضلية الخاصة بالمسألة الابتدائية في المثال السابق بأكثر من طريقة. بفصل المتغيرات، والتكامل نجد أن

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + c \rightarrow \ln(y) = x + c$$

بالتعويض من الشرط الابتدائي $x = 0,\ y = 1$ نجد أن

$$\ln(1) = 0 + c \rightarrow c = 0$$

إذاً

$$\ln(y) = x \rightarrow y = e^x$$

✍.

1.11 مسائل

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2}{y}$ (2) $yy' = \frac{x - 2}{y - 1}$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{y + 2}$ (4) $x^3 y' = \cosh(y)$

(5) $xy' = e^y$ (6) $x^3 y' = e^{2y}$

(7) $3x dx + (y + 4)dy = 0$ (8) $xy' = x^3 + y^3$

(9) $2x^2dy = \left(y^2 + x^2\right)dx$

(10) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y}{x + y}$

(11) $x\frac{dy}{dx} = y + 4\sqrt{xy}$

(12) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2$

(13) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$

(14) $y' - y = \cosh(x)$

(15) $y^2\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{y^3}{x}$

(16) $x\frac{dy}{dx} = 4y + 4\sqrt{xy}$

(17) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

(18) $x^2y' - 3y^3 = 0$

(19) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 3y - 7}{x - 4}$

(20) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2}{\ln(y)}$

(21) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - y - 9}{x + y + 1}$

(22) $\frac{dy}{dx} = 5x^4(y + 2)$

(23) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x + y - 3}$

(24) $y' - xy = 3x + e^{3x}$

(25) $\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(xy) + xy\sin(xy)}{-x^2\sin(xy) + 2y}$

(26) $2y' + 3y = e^{2x}$

(27) $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(8x - ye^{xy}\right)}{\left(2y + xe^{xy}\right)}$

(28) $y^3dx + y^{\frac{3}{2}}dy = 0$

(29) $y^3dx + \left(3xy^2 - 1\right)dy = 0$

(30) $y' = \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x}$

(31) $(3yx + y + 4)dx + \frac{1}{2}xdy = 0$

(32) $ydx + \left(2x^3 - 2\right)dy = 0$

(33) $3yx^2dx + \left(2x^3 - 2\right)dy = 0$

(34) $\left(3yx^2 + y^2 + 4\right)dx + \frac{1}{2}xdy = 0$

(35) $\left(1 + x + y^2\right)dx + 2ydy = 0$

(36) $y^3x^2dx + \left(x^3y^2 - 1\right)dy = 0$

(37) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2$ (38) $y' = \frac{1}{x}y^2 + \frac{2}{x}y;\ y(1) = 4$

(39) $2y' + 3y = e^{2x}$ (40) $x^2dy = \left(y^2 + x^2\right)dx$

(41) $\sin(2x)y' + 2y\sin^2 x = 2\sin x$

(42) $\left(x + y^2\right)dx + ydy = 0$

(43) $xy' - 4x^2y^2 = 18y$ (44) $3x^4dx + (5y + 4)dy = 0$

(45) $x^2y' - 3y^3 = 2xy$

(46) $\sin(x)y' + y\sin^2(x) = \sin(x)$

(47) $y' = \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x}$

(48) $y' = \frac{4}{x}y^2 + xy + 2x\left(1 + x^2\right)$

(49) $y' = \frac{1}{x}y^2 + xy + 2x\left(1 - x^2\right)$

(50) $xdx - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - y\right)dy = 0$

استخدم طريقة بيكارد للحصول على حلول تكرارية للمسائل الابتدائية في المناطق المبينة

(51) $y' = x - y^2;\ y(0) = 0;\ a = b = 1$

(52) $y' = x + y;\ y(0) = 1;\ a = 1,\ b = 2$

(53) $y' + y = 2;\ y(0) = 1;\ a = b = 1$

(54) $y' = x - 2y;\ y(1) = 3;\ a = 1,\ b = 3$

(55) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x};\ y(1) = 6;\ a = 2.\ b = 1$

****

الباب 2

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

Linear Differential Equations of the Second Order

في هذا الباب ندرس المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية، المتجانسة وغير المتجانسة، ذات المعاملات الثابتة فقط. على أن ندرس المعادلات ذات المعاملات المتغيرة في الباب التالي. في الحقيقة فإن المعادلة المتجانسة يوجد لها حل واحد فقط يسمى بالحل العام، وهذا الحل العام للمعادلات المتجانسة يتوقف على شكل ما يسمى جذور المعادلة المميزة - كما سنرى. أما الحل العام للمعادلة غير المتجانسة فهو يتكون من حلين، الأول يسمى **"الحل المكمل"** *(Complementary Solution)* وسوف نرمز له بالرمز $y_c(x)$ وهو في الواقع ليس إلا الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة للمعادلة غير المتجانسة، والحل الثاني يسمى **"الحل الخاص"** وسوف نرمز له بالرمز $y_p(x)$. فيكون أن مجموع الحلين المكمل والخاص هو الحل العام للمعادلة غير المتجانسة. هذا، وسوف نستعرض في هذا الباب طريقة واحدة للحصول على الحل المكمل تسمى طريقة المعادلة المميزة، كما نقدم ثلاث طرق للحصول على الحل الخاص هي طريقة مقارنة المعاملات *(Undetermined Coefficients)*،

وطريقة تغيير البارامترات *(Variation of Parameters)*، ثم طريقة المؤثرات التفاضلية *(Differential Operators)*. علاوة على ذلك فسوف نعرج في الفصل السابع من هذا الباب على طريقة اختزال رتبة المعادلة *(Reduction of Order)*، وهي تصلح لحل كل من المعادلات الخطية وغير الخطية على حد سواء.

2.1 مقدمة

تُعرف الصورة العامة للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية بصفة عامة (خطية أو غير خطية) على أنها المعادلة التي تأخذ الشكل

$$F(x, y, y', y'') = 0; \quad x \in I \tag{2.1}$$

حيث I هي فترة انتماء المتغير المستقل x. وإذا كانت الدالة $y = f(x)$ تحقق المعادلة (2.1) أي إذا كان

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x)) = 0 \quad \forall \ x \in I \tag{2.2}$$

عندئذٍ يقال أن $y = f(x)$ هو الحل العام للمعادلة (2.1) في الفترة I. على أية حال فسوف نركز اهتمامنا فقط على المعادلات الخطية من الرتبة الثانية المتجانسة وغير

المتجانسة. ولأن التجانس هنا يختلف عن معنى التجانس للمعادلات من الرتبة الأولى، ليتنا نبدأ بالتعريفات التالية.

تعريف 2.1 تعرف المعادلات الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية على أنها المعادلة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = G(x) \tag{2.3}$$

حيث المعاملات $P(x),\ Q(x)$ هي دوال متصلة في المتغير x. بينما الدالة $G(x)$، والتي تسمى **"دالة الهدف"** *(Target Function)*، وأحياناً تسمى الحد غير المتجانس *(Inhomogeneous Term)* هي دالة غير صفرية، على الأقل لقيمة واحدة من القيم التي تنتمي إلى الفترة I؛ أي أن $G(x) \neq 0$ على الأقل لقيمة وحيدة، $x \in I$.

✍.

تعريف 2.2 إذا كانت الدالة $G(x)$ في المعادلة (2.3) دالة صفرية لكل قيم الفترة I، أي إذا كان

$$G(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

فإن المعادلة (2.3) تسمى معادلة خطية متجانسة من الرتبة الثانية، وتأخذ عندئذٍ الشكل

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2.4}$$

✍.

مثال توضيحي

في الأمثلة التالية سنجد توضيحاً للتعريفات السابقة. حيث نجد أن المعادلة (2.5) هي معادلة خطية وغير متجانسة، أما المعادلة (2.6) فهي معادلة غير متجانسة وغير خطية بسبب وجود الحد yy'.

كذلك فإن المعادلة (2.7) هي معادلة خطية متجانسة بينما (2.8) فهى معادلة متجانسة وغير خطية بسبب وجود الحد $(y'')^2$.

$$y'' + 4xy' + xy = \ln(x) \tag{2.5}$$

$$y'' - yy' + 7xy = e^x \tag{2.6}$$

$$y'' - xy' + 7y = 0 \tag{2.7}$$

$$(y'')^2 - y' + 2y = 0 \tag{2.8}$$

وكمثل معادلات الرتبة الأولى لا توجد نظرية عامة تثبت وجود ووحدانية حل معادلات الرتبة الثانية في شكلها العام، ولذا فسوف ندرس معادلات الرتبة الثانية باعتبارها أنواعاً مختلفة والتعامل مع كل نوع على حدة. بيد أن النظرية التالية تثبت وجود ووحدانية حل المسائل الابتدائية لمعادلات الرتبة الثانية فى حالة ما إذا كانت المعادلة خطية وكانت الدوال $P(x),\ Q(x),\ G(x)$ متصلة على فترة ما مثل I.

نظرية 2.3

لنعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية (2.3)، ولنفرض أن الدوال الثلاث $P(x), Q(x), G(x)$ متصلة على الفترة I. إذا كان حل المعادلة (2.3) في حالة وجوده يحقق الشرطين الابتدائيين

$$y(x_0) = \alpha, \ \ y'(x_0) = \beta \tag{2.9}$$

حيث α، β اعداد حقيقية، بينما x_0 هي أية نقطة في الفترة I. إذاً فإنه يوجد للمسألة الابتدائية المكونة من المعادلة (2.3) والشرطين الابتدائيين (2.9) حل وحيد *(Unique Solution)*.

✍.

ملاحظة

لاحظ الفروق بين النظرية السابقة والنظرية (1.1). حيث نلاحظ أن نظرية (1.1) تختص بالمسائل الابتدائية لمعادلات الرتبة الأولى خطية كانت أم غير خطية بعكس النظرية (2.1) والتي تختص بالمسائل الابتدائية لمعادلات الرتبة الثانية الخطية فقط. كذلك فإن المسائل الابتدائية لمعادلات الرتبة الأولى تحتوي على شرط ابتدائي واحد بينما معادلات الرتبة الثانية تحتوي على شرطين ابتدائيين.

الآن نحاول الحصول على شكل الحل العام للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية أي المعادلة التي على الشكل (2.4). لكن قبل البدء في تقديم طريقة الحصول على الحل العام للمعادلة المتجانسة (2.4)، والذي يسمى حلاً مكملاً للمعادلة (2.3) نقدم ثلاثة نظريات تصف لنا شكل الحل وخصائصه.

نظرية 2.4 إذا كان الحلان $y_1(x),\ y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (2.4) في الفترة I، إذاً فإن $c_1y_1(x),\ c_2y_2(x),\ c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ هي أيضاً حلولاً للمعادلة (2.4) حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

البرهان بما أن $y_1(x),\ y_2(x)$ حلان للمعادلة (2.4) إذاً فهما يحققانها. بالتعويض عن الحلول $y_1(x),\ y_2(x)$ بالترتيب في (2.4) نحصل على

$$y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)=0 \tag{2.10}$$

$$y_2''(x)+P(x)y_2''(x)+Q(x)y_2(x)=0 \tag{2.11}$$

بالتعويض عن الحلول $c_1y_1(x), c_2y_2(x)$ بالترتيب في المعادلة (2.4) مع الأخذ في الاعتبار المعادلات (2.11) ,(2.10) نحصل على

$$c_1\left(y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)\right)=c_1.0=0 \tag{2.12}$$

$$c_2\left(y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+Q(x)y_2(x)\right)=c_2.0=0 \tag{2.13}$$

الأمر الذي يعني أن الحلين $c_1y_1(x),\ c_2y_2(x)$، هما — أيضاً — يحققان المعادلة (2.4) وبالتالي يعتبران حلين لها.

وبالتعويض عن الحل $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ في المعادلة (2.4) — مع الأخذ في الاعتبار المعادلات (2.12), (2.13) — نجد أن

$$\left(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right)''+P(x)\left(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right)'$$

$$+Q(x)\left(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right)=0$$

أو

$$c_1\left(y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)\right)$$

$$+c_2\left(y_2''(x)+P(x)y_2''(x)+Q(x)y_2(x)\right)=0+0=0$$

إذاً فإن الحل $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ يحقق — أيضاً — المعادلة (2.4) وبالتالي فهو حل لها.

✍.

نظرية 2.5 يقال أن الحلين $y_1(x),\ y_2(x)$، للمعادلة (2.4) لايرتبطان خطياً في الفترة I إذا كان ما يسمى "الفرونيسكان" *(Wronskian)* والذي يرمز له بالرمز $W\left(y_1(x),y_2(x)\right)$ لايساوي الصفر. أي إذا كان

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.14}$$

بالمناسبة فإن الفرونيسكان ينتسب إلى عالِم الرياضيات البولندي فرونيسكي *(Wronski J. M., 1776 - 1853)*.

نظرية 2.6 إذا كان الحلان $y_1(x)$، $y_2(x)$ للمعادلة (2.4) لايرتبطان أو مستقلان خطياً فعندئذٍ يسميان **"الحلان الأساسيان"** *(Fundamental Solutions)* ويأخذ الحل العام الشكل

$$\boxed{y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)} \tag{2.15}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

ملاحظة

بإطلاق الثوابت c_1، c_2 في الحل العام $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ لتأخذ قيمها الاختيارية الممكنة نحصل على ما يسمى فضاء الحلول *(Space of the Solutions)* ويكون أن ُبعد فضاء الحلول *(Dimension)* يساوي عدد الحلول الأساسية.

2.2 الحل العام للمعادلات المتجانسة باستخدام طريقة المعادلة المميزة

نحاول في هذا الفصل الحصول على شكل الحل العام للمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة وذلك باستخدام "**طريقة المعادلة المميزة**". لنعتبر المعادلة

$$y'' + Ay' + By = 0 \tag{2.16}$$

حيث A, B ثوابت. لنفرض أن الدالة الأسية $y = e^{rx}$ هي حل للمعادلة (2.16) حيث r بارامتر معين مجهول. بما أن $y = e^{rx}$ يعتبر حلاً للمعادلة (2.16) (حسب الفرض) إذاً فهو يحققها، وبالتالي بالتعويض في المعادلة (2.16) عن

$$y = e^{rx},\ y' = re^{rx},\ y'' = r^2e^{rx} \tag{2.17}$$

نحصل على

$$r^2e^{rx} + rAe^{rx} + Be^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}\left(r^2 + Ar + B\right) = 0$$

وبما أن $e^{rx} \neq 0$. إذاً ـ وبعد القسمة على المقدار e^{rx} ـ نحصل على المعادلة

$$\boxed{r^2 + Ar + B = 0} \tag{2.18}$$

المعادلة (2.18) ما هي في الواقع إلا معادلة جبرية من الدرجة الثانية في المتغير r وتسمى "**المعادلة المميزة**"

(Characteristic Equation) للمعادلـة التفاضليـة (2.16). مـن الواضح أن حل المعادلة المميزة (2.18) هو

$$r_1 = \frac{-A+\sqrt{A^2-4B}}{2}, \quad r_2 = \frac{-A-\sqrt{A^2-4B}}{2} \tag{2.19}$$

وبالتالي لدينا ثلاثة احتمالات بالنسبة للجذرين r_1, r_2. فإما أنهما حقيقيان ومختلفان، أو حقيقيان ومكـراران، إما أنهمـا تخيليان (مركبان).

الاحتمال الأول

الجـذران r_1, r_2 حقيقيـان ومختلفـان. فـي هـذه الحالـة فـإن المميز، $\left(A^2-4B\right)$، أكبر من الصفر.

نفرض أن

$$A^2-4B=\alpha>0$$

بالتعويض في (2.19) نجد أن

$$r_1 = \frac{-A+\sqrt{\alpha}}{2}, \quad r_2 = \frac{-A-\sqrt{\alpha}}{2} \tag{2.20}$$

إذاً هناك حلان للمعادلة (2.16) هما

$$y_1(x)=e^{r_1 x}, \; y_2(x)=e^{r_2 x} \tag{2.21}$$

حيث الجذران r_1, r_2 يعطيان من (2.20). هذا، ولنبحث الآن للتأكد من أنهما لايرتبطان خطياً. من نظرية (2.7) نجد أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix}$$

$$= r_2 e^{r_2 x} e^{r_1 x} - r_1 e^{r_1 x} e^{r_2 x} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

وذلك لأن $r_2 \neq r_1$. وطبقاً للنظرية (2.7) فإن $y_1(x), y_2(x)$ يعتبران حلين أساسيين، وعندئذٍ يأخذ الحل العام الشكل

$$y_g(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{2.22}$$

حيث يعطى الجذران r_1, r_2 من المعادلة (2.20)، أما c_1, c_2 فهما ثابتان اختياريان.

الاحتمال الثاني

الجذران r_1, r_2 حقيقيان ومكرران. في هذه الحالة فإن المميز، $(A^2 - 4B)$، يساوي الصفر.

بما أن

$$A^2 - 4B = 0$$

بالتعويض في (2.19) نجد أن

$$r_1 = r_2 = \frac{-A}{2} \tag{2.23}$$

إذاً هناك حلان مكرران للمعادلة (2.16) هما

$$y_1(x) = e^{-\frac{A}{2}x}, \; y_2(x) = e^{-\frac{A}{2}x} \tag{2.24}$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{A}{2}x} & e^{-\frac{A}{2}x} \\ -\frac{A}{2}e^{-\frac{A}{2}x} & -\frac{A}{2}e^{-\frac{A}{2}x} \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي فإن الحلين $y_1(x)$، $y_2(x)$ يكونـا مرتبطيـن خطيـاً، وطبقاً لنظرية (2.7) لا يمكن أن يكونا حليـن أساسـيين. لكـي نحصل على حلين غير مرتبطين خطياً نـأخذ الحـل الأول فـي الشكل $y_1(x) = e^{-\frac{A}{2}x}$، بينما نأخذ الحل الثانى في الشكل

$$y_2(x) = \psi(x)y_1(x) = \psi(x)e^{-\frac{A}{2}x} \tag{2.25}$$

بالتفاضل نحصل على

$$y_2'(x) = \psi'(x)e^{-\frac{A}{2}x} - \frac{A}{2}\psi(x)e^{-\frac{A}{2}x}$$

بالتفاضل مرة أخرى نحصل على

$$y_2''(x) = -\frac{A}{2}\psi'(x)e^{-\frac{A}{2}x} + \psi''(x)e^{-\frac{A}{2}x}$$
$$-\frac{A}{2}\psi'(x)e^{-\frac{A}{2}x} + \left(-\frac{A}{2}\right)^2\psi(x)e^{-\frac{A}{2}x}$$

بمـا أنـه مـن المفـروض أن $y_2(x) = \psi(x)e^{-\frac{A}{2}x}$ يعتـبر حـلاً للمعادلـة (2.16)، إذاً فهـو يحققهـا. بـالتعويض عـن الكميـات

$y_2(x)$، $y_2'(x)$، $y_2''(x)$ في المعادلة (2.16)، والقسمة على $e^{-\frac{A}{2}x}$ فإننا نحصل على

$$-\frac{A}{2}\psi'(x)+\psi''(x)-\frac{A}{2}\psi'(x)+\left(-\frac{A}{2}\right)^2\psi(x)$$

$$+A\left(\psi'(x)-\frac{A}{2}\psi(x)\right)+B\psi(x)=0$$

وبما أن

$$A^2-4B=0\rightarrow B=\frac{A^2}{4}$$

وبالتعويض والاختصار نجد أن

$$\psi''(x)=0$$

بالمناسبة فهذه المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. للحصول على حلها العام نجري عملية التكامل على طرفي هذه المعادلة مرتين نحصل على

$$\psi(x)=c_1x+c_2$$

حيث c_1, c_2 هي ثوابت اختيارية. فإذا فرضنا ـ مثلاً ـ أن $c_2=0,\ c_1=1$ فإننا نجد أن $\psi(x)=x$، وبالتالي فإذا تم التعويض عن $\psi(x)=x$ في (2.25) فعندئذٍ نحصل على الحل الثاني $y_2(x)$ في الشكل

$$y_2(x) = xe^{\frac{-Ax}{2}}$$

الآن يمكن – بالطبع – التأكد أن الحلين

$$y_1(x) = e^{-\frac{A}{2}x},\ y_2(x) = xe^{-\frac{A}{2}x} \tag{2.26}$$

غير مرتبطين خطياً، وعلى هذا فهما الحلان الأساسيان في فراغ الحلول، ويكون ُبعد فراغ الحلول هو العدد 2. ويأخذ الحل العام في هذه الحالة الشكل

$$\boxed{y_g(x) = c_1e^{\frac{-Ax}{2}} + c_2xe^{\frac{-Ax}{2}}} \tag{2.27}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

الاحتمال الثالث

الجذران r_1، r_2 مركبان أو تخيليان *(Imaginary)*. في هذه الحالة فإن المميز، $(A^2 - 4B)$ يكون أقل من الصفر.

بما أن

$$A^2 - 4B < 0$$

فإذا اعتبرنا أن $i = \sqrt{-1}$، فإن جذور المعادلة المميزة (2.18) تكون

$$r_1 = \frac{-A + i\sqrt{4B - A^2}}{2},\ r_2 = \frac{-A - i\sqrt{4B - A^2}}{2} \tag{2.28}$$

فإذا وضعنا

$$p=-\frac{A}{2},\ q=\frac{\sqrt{4B-A^2}}{2} \tag{2.29}$$

في المعادلة (2.28) فإننا نحصل على

$$r_1=p+iq\ \ ,\ r_2=p-iq \tag{2.30}$$

إذاً فإن

$$y_1=e^{r_1x}=e^{(p+iq)x},\ \ y_2=e^{r_2x}=e^{(p-iq)x} \tag{2.31}$$

ويمكن التأكد من أنهما غير مرتبطين خطياً وعلى هذا فـــإن الحل العام هو

$$y_g(x)=c_1e^{(p+iq)x}+c_2e^{(p-iq)x} \tag{2.32}$$

وإذا تذكرنا قاعدة أويلر *(Euler's Formula)* المشهورة والتي تنص على أن

$$e^{i(qx)}=\cos(qx)+i\sin(qx) \tag{2.33}$$

عندئذٍ يمكن القول أن

$$e^{(p+iq)x}=\left(e^{px}\right)\left(e^{i(qx)}\right)=e^{px}\left[\cos(qx)+i\sin(qx)\right] \tag{2.34}$$

وأيضاً فإن

$$e^{(p-iq)x}=\left(e^{px}\right)\left(e^{i(-qx)}\right)=e^{px}\left[\cos(-qx)+i\sin(-qx)\right]$$

$$=e^{px}\left[\cos(qx)-i\sin(qx)\right] \tag{2.35}$$

وبالتعويض من (2.35) ,(2.34) في (2.32) نجد أن

$$y_g(x) = c_1 e^{px}\left[\cos(qx) + i\sin(qx)\right]$$
$$+c_2 e^{px}\left[\cos(qx) - i\sin(qx)\right]$$
$$= (c_1 + c_2)e^{px}\cos(qx) + (ic_1 - ic_2)e^{px}\sin(qx)$$
$$= C_1 e^{px}\cos(qx) + C_2 e^{px}\sin(qx)$$

حيث تم وضع $C_1 = c_1 + c_2,\ C_2 = ic_1 - ic_2$. ويمكن التأكد أن الفرونيسكان $W(y_1, y_2)$ للحلين

$$y_1(x) = e^{px}\cos(qx),\ y_2(x) = e^{px}\sin(qx) \tag{2.36}$$

لايساوي الصفر. وهكذا نجد أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (2.16) في حالة أن $A^2 - 4B < 0$ هو

$$y_g(x) = e^{px}\left(C_1\cos(qx) + C_2\sin(qx)\right) \tag{2.37}$$

حيث C_1, C_2 ثابتان اختياريان.

الخلاصة للحصول على الحل العام للمعادلة

$$y'' + Ay' + By = 0$$

نوجد ـ أولاً ـ الجذرين r_1, r_2 للمعادلة المميزة

$$r^2 + Ar + B = 0$$

(1) إذا كان $A^2 - 4B > 0$، بمعنى أن $r_1 \neq r_2$، أي أن الجذرين حقيقيان ومختلفان فإن الحل العام هو

$$y_g(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

حيث

$$r_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

(2) إذا كان $A^2 - 4B < 0$؛ بمعنى أن الجذرين تخيليان فإن الحل العام يأخذ الشكل

$$y_g(x) = e^{px}\left(c_1 \cos(qx) + c_2 \sin(qx)\right)$$

حيث

$$p = -\frac{A}{2}, \; q = \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2}$$

(3) أما إذا كان $A^2 - 4B = 0$، أو أن الجذرين مكرران فإن الحل العام هو

$$y_g(x) = c_1 e^{\frac{-Ax}{2}} + c_2 x e^{\frac{-Ax}{2}}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

مثال 2.1 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

الحل في هذه المعادلة نجد أن $A=-4,\ B=3$ وبالتالي فإن المعادلة المميزة (2.18) تعطي

$$r^2-4r+3=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=3$$

وبما أن الجذرين حقيقيان ومختلفان إذاً الحل العام ـ طبقاً للصورة الرياضية رقم (2.38) ـ هو

$$y_g(x)=c_1e^x+c_2e^{3x}$$

✍.

مثال 2.2 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y''+9y=0$$

الحل في هذه المعادلة نجد أن $A=0,\ B=9$، وبالتالي فإن المعادلة المميزة (2.18) تعطي

$$r^2+9=0 \Rightarrow r_1,r_2=0\pm 3i$$

وبما أن الجذرين تخيليان إذاً الحل العام ـ طبقاً للصورة الرياضية رقم (2.39) ـ هو

$$\begin{aligned} y_g(x) &= e^{0x}\left(c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)\right) \\ &= c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x) \end{aligned}$$

✍.

مثال 2.3 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - 9y = 0$$

الحل في المعادلة المعطاة نجد أن $A = 0,\ B = -9$، وبالتالي فإن المعادلة المميزة (2.18) تعطي

$$r^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -3, r_2 = +3$$

وبما أن الجذرين حقيقيان ومختلفان إذاً الحل العام ـ طبقاً للصورة الرياضية رقم (2.38) ـ هو

$$y_g(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

✍.

مثال 2.4 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 2y' + 6y = 0$$

الحل في هذه المعادلة نجد أن $A = 2,\ B = 6$، وبالتالي فإن المعادلة المميزة (2.18) تعطي

$$r^2 + 2r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}\, i$$

وبما أن الجذرين تخيليان إذاً الحل العام ـ طبقاً للصورة الرياضية رقم (2.39) ـ هو

$$y_g(x) = c_1 e^{-x} \cos\left(\sqrt{5}x\right) + c_2 e^{-x} \sin\left(\sqrt{5}x\right)$$

✍.

مثال 2.5 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

الحل في هذه المعادلة نجد أن $A = -4,\ B = 4$، وبالتالي فإن المعادلة المميزة (2.18) تعطي

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 2$$

وبما أن الجذرين حقيقيان ومكراران إذاً الحل العام ـ طبقاً للصورة الرياضية رقم (2.40) ـ هو

$$y_g(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$$

✍.

2.3 الحل العام للمعادلات غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

نحاول في هذا الفصل الحصول على الحل العام للمعادلات الخطية، ذات المعاملات الثابتة، وغير المتجانسة من الرتبة الثانية. لنعتبر المعادلة

$$y'' + Ay' + By = G(x) \tag{2.38}$$

هذه المعادلة غير المتجانسة (2.38) يوجد لها معادلة متجانسة تسمى **"المعادلة المتجانسة المقابلة"** *(Associated Equation)* أو المكملة *(Complementary)* وهي

$$y'' + Ay' + By = 0 \tag{2.39}$$

في الواقع فإن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (2.38) يتكون من حلين، الأول يسمى الحل المكمل، وسوف نرمز له بالرمز $y_c(x)$، وهو عبارة عن الحل العام للمعادلة المقابلة (2.39).

والحل الثاني يسمى الحل الخاص وسوف نرمز له بالرمز $y_p(x)$ وهو عبارة عن أي حل يحقق المعادلة غير المتجانسة (2.38). ويكون مجموع الحلين المكمل والخاص هو الحل العام للمعادلة غير المتجانسة. النظرية التالية تقدم شكل الحل العام للمعادلة (2.38).

نظرية 2.7 إذا كان $y_c(x)$ يرمز للحل العام للمعادلة (2.39)، وكان $y_p(x)$ يرمزلأي حل يحقق المعادلة غير المتجانسة (2.38). إذاً فإن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (2.38) هو الحل

$$y_g(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

البرهان نفرض أن $y_p(x)$ هو أي حل للمعادلة (2.38)، إذاً فهو يحققها. بالتالي بوضع $y_p(x)$ بدلاً من $y(x)$ في المعادلة (2.38) نحصل على

$$y_p'' + Ay_p' + By_p = G(x) \tag{2.40}$$

نفرض ـ أيضاً ـ أن $y_c(x)$ هو الحل العام للمعادلة (2.39) المتجانسة والمقابلة للمعادلة غير المتجانسة (2.38)، إذاً فهو يحققها. بوضع $y_c(x)$ بدلاً من $y(x)$ فى المعادلة (2.39) نحصل على

$$y_c'' + Ay_c' + By_c = 0 \tag{2.41}$$

بجمع المعادلتين (2.41) ,(2.40) نحصل على

$$\left(y_p + y_c\right)'' + A\left(y_p + y_c\right)' + B\left(y_p + y_c\right) = G(x) \tag{2.42}$$

من المعادلة رقم (2.42) نجد أن $\left(y_p + y_c\right)$ هو أيضاً حل للمعادلة غير المتجانسة (2.38). كذلك نجد ـــ بمقارنة المعادلتين (2.38)، (2.42) ـ أن

$$y = y_p + y_c \tag{2.43}$$

أيضاً، بطرح المعادلة (2.40) من المعادلة (2.38) نحصل على المعادلة المتجانسة

$$\left(y - y_p\right)'' + A\left(y - y_p\right)' + B\left(y - y_p\right) = 0 \tag{2.44}$$

بمقارنة المعادلة رقم (2.44) مع المعادلة رقم (2.41)، نجد أن $\left(y - y_p\right)$ هو حل للمعادلة المتجانسة، وبالتالي فإن

$$\left(y - y_p\right) = y_c \tag{2.45}$$

هكذا نجد أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية (2.38) هو

$$y_g(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{2.46}$$

حيث $y_c(x)$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة (2.39) أما $y_p(x)$ فهو أي حل خاص للمعادلة غير المتجانسة نفسها أي المعادلة رقم (2.38). بالنسبة للحل المكمل فهو في الواقع الحل العام للمعادلة المتجانسة (2.39) ويمكن الحصول عليه بطريقة المعادلة المميزة كما في الفصل السابق. وبالنسبة للحل الخاص فسوف نقدم الآن ثلاث طرق مختلفة. الطريقة الأولى تسمى طريقة **"مقارنة المعاملات"**، والطريقة الثانية تسمى **"طريقة تغيير البارامترات"**، أما الطريقة الثالثة فهي طريقة المؤثرات التفاضلية.

2.4 طريقة مقارنة المعاملات لإيجاد الحل الخاص

Undetermined Coefficients Method

تعتمد طريقة مقارنة المعاملات لإيجاد الحل الخاص، $y_p(x)$، للمعادلة الخطية من الرتبة الثانية غير المتجانسة (2.38) على معرفة الشكل الرياضي لدالة الهدف، $G(x)$.

فمثلاً إذا كانت الدالة $G(x)$ دالة مثلثية، فإننا نتوقع أن يكون الحل الخاص $y_p(x)$ مكوناً ـ هو أيضاً ـ من دوال مثلثية،

وذلك لأن التأثير التفاضلي على دالة مثلثية ينتج دالة مثلثية أيضاً. وهكذا الحال إذا كانت الدالة $G(x)$ دالة أسية، أو دالة زائدية، أو غيرها. جدول (2.1) يقدم بعض الأشكال المتوقعة للحل الخاص طبقاً لأشكال الدالة $G(x)$ الممكنة.

جدول 2.1

الشكل المتوقع للحل الخاص $y_p(x)$	شكل دالة الهدف $G(x)$
$d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$	$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$
$d\, e^{\alpha x}$	$c\, e^{\alpha x}$
$a \sin(\beta x) + b \cos(\beta x)$	$c \cos(\beta x)$ أو $c \sin(\beta x)$
$\left(d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n\right) e^{\alpha x}$	$\left(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n\right) e^{\alpha x}$
$\sin(\beta x) \sum_{i=0}^{n} d_i x^i + \cos(\beta x) \sum_{i=0}^{n} h_i x^i$	$\sin(\beta x) \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ أو $\cos(\beta x) \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$
$\sin(\beta x) e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{n} d_i x^i + \cos(\beta x) e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{n} k_i x^i$	$\sin(\beta x) e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ أو $\cos(\beta x) e^{\alpha x} \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$

مثال 2.6 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' - 4y = 8x^2 - 2x \qquad \text{(i)}$$

الحل بما أن دالة الهدف هي $G(x) = 8x^2 - 2x$، أي كثيرة حدود من الدرجة الثانية، إذاً نقترح الحل الخاص، y_p، على شكل كثيرة حدود من الدرجة الثانية أيضاً. إذاً

$$y_p = ax^2 + bx + c \qquad \text{(ii)}$$

التفاضل مرة واحدة، ثم مرتين نحصل على

$$y_p' = 2ax + b, \; y_p'' = 2a \qquad \text{(iii)}$$

بالتعويض عن الكميات y_p'', y_p', y_p من المعادلات (ii), (iii)، وذلك في المعادلة المعطاة نجد أن

$$2a - 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2 - 2x$$

أو

$$-4ax^2 - 4bx + 2a - 4c = 8x^2 - 2x$$

بمقارنة معاملات الطرفين نجد أن

$$-4a = 8 \;, \quad -4b = -2 \;, \quad 2a - 4c = 0$$

إذاً

$$a = -2 \;, \quad b = \frac{1}{2} \;, \quad c = -1$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = -2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

✍.

مثال 2.7 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{2x}$$

الحل بما أن $G(x) = 4e^{2x}$، إذاً دعنا نقترح الحل الخاص على شكل دالة أسية أيضاً. إذاً

$$y_p = ke^{2x}$$

بإجراء التفاضل، نحصل على

$$y_p = ke^{2x}\ ,\quad y_p{}' = 2ke^{2x}\ ,\quad y_p{}'' = 4ke^{2x}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$4ke^{2x} + 4ke^{2x} - 3ke^{2x} = 4e^{2x}$$

بالقسمة على e^{2x}، إذاً

$$5k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{5}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{4}{5}e^{2x}$$

✍.

مثال 2.8 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' - 3y' + 7y = x - \cos(2x)$$

الحل بما أن $G(x) = x - \cos(2x)$، إذاً نقترح الحل الخاص على شكل دالة مكونة من دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى، علاوة على دالة مثلثية، إذاً

$$y_p = ax + b + h\cos(2x) + k\sin(2x)$$

بإجراء التفاضل مرة ثم مرتين، نحصل - بالترتيب - على

$$y_p' = a - 2h\sin(2x) + 2k\cos(2x);$$

$$y_p'' = -4h\cos(2x) - 4k\sin(2x)$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن

$$-4h\cos(2x) - 4k\sin(2x) - 3(a - 2h\sin(2x) + 2k\cos(2x))$$
$$+7(ax + b + h\cos(2x) + k\sin(2x)) = x - \cos(2x)$$

أو

$$7ax + 7b - 3a + (3h - 6k)\cos(2x)$$
$$+(3k + 6h)\sin(2x) = x - \cos(2x)$$

وبمقارنة المعاملات، نجد أن

$$7a = 1,\ 7b - 3a = 0,\ 3h - 6k = -1,\ 3k + 6h = 0$$

وبالتالي فإن

$$a=\frac{1}{7},\quad b=\frac{3}{49},\quad h=-\frac{1}{15},\quad k=\frac{2}{15}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{7}x+\frac{3}{49}-\frac{1}{15}\cos(2x)+\frac{2}{15}\sin(2x)$$

مثال 2.9 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y''+2y'-3y=4e^x$$

الحل في هذا المثال لدينا $G(x)=4e^x$. إذاً نقترح الحل الخاص على الشكل $y_p=Ae^x$. بالتفاضل نجد أن

$$y_p'=y_p''=Ae^x$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$Ae^x+2Ae^x-3Ae^x=4e^x$$

هذه المعادلة الأخيرة تعني أن $4e^x=0$ وهذا مستحيل. في الواقع فإن الحل الخاص المقترح، $y_p=Ae^x$ هو نفسه الحل العام للمعادلة المتجانسة $y''+2y'-3y=0$ المكملة للمعادلة المعطاة حيث أنه يحققها. في مثل هذه الحالات يتم ضرب الحل الخاص المقترح في إحدى قوى x، على ذلك نفرض أن

$$y_p = Axe^x$$

وبالتفاضل نجد أن

$$y_p' = Ae^x + Axe^x, \quad y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن

$$2Ae^x + Axe^x + 2\left(Ae^x + Axe^x\right) - 3Axe^x = 4e^x$$

أو

$$4Ae^x = 4e^x \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

إذاً الحل الخاص هو $y_p = xe^x$

✍.

2.5 طريقة تغيير البارامترات
Method of Variation of Parameters

لاحظنا عند تطبيق طريقة مقارنة المعاملات السابقة للحصول على الحلول الخاصة أنه ليس من الضروري معرفة الحلين الأساسيين $y_1(x), y_2(x)$ للمعادلة المتجانسة المقابلة أو المكملة للمعادلة غير المتجانسة، وهذه الخاصية تعتبر ميزة هامة جداً لهذه الطريقة، ولكن في المقابل يوجد عيب في هذه الطريقة، وهو أنه في كثير من المسائل العملية لايمكن التخمين عن شكل الحل الخاص المقترح. فمثلاً إذا كانت دالة الهدف تتكون من دوال مثلثية، أو زائدية، أو أية

دوال أخرى تختلف عن تلك التي في جدول (2.1) مثل الدالة $G(x)=\cot(x)$، أو الدالة $G(x)=\dfrac{\tan(x)}{\ln(x)}$، فواضح أنه من الصعب معرفة شكل الحل الخاص باستخدام طريقة مقارنة المعاملات.

بالإضافة إلى ما سبق فإن طريقة مقارنة المعاملات لا تتعامل إلا مع المعادلات ذات المعاملات الثابتة. فإذا كانت معاملات المعادلة التفاضلية دوالاً في المتغير x فلا يمكن في هذه الحالة استخدام طريقة مقارنة المعاملات. من هنا كانت الحاجة إلى طريقة أخرى تتغلب على هذه العيوب.

إن طريقة تغيير البارامترات – ومع أنها تتطلب معرفة الحلين $y_1(x), y_2(x)$ للمعادلة المتجانسة المقابلة – إلا أنها تتعامل مع أي شكل للدالة $G(x)$، كما أنها تتعامل مع المعادلات التفاضلية بغض النظر عن معاملاتها ثوابت كانت أم متغيرات.

فإذا فرضنا أن $y_1(x), y_2(x)$، هما الحلان الأساسيان لفضاء حلول المعادلة المتجانسة المقابلة؛ فإن طريقة تغيير البارامترات تفرض الحل الخاص، y_p، للمعادلة غير المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة (مثل المعادلة (2.3))، أو ذات المعاملات الثابتة (مثل المعادلة (2.38)) في الشكل

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \tag{2.47}$$

واضح ـ طبعاً ـــ أن هذا الحل الخاص يعتمد على الحلين الأساسيين، $y_1(x)$، $y_2(x)$. ويكون المطلوب الآن هو إيجاد الدالتين $u(x)$، $v(x)$ وذلك حتى نتمكن من الحصول على شكل الحل الخاص في صورته النهائية. بتفاضل الحل y_p المقترح في (2.47) نحصل على

$$y_p' = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x) + v'(x)y_2(x) + v(x)y_2'(x) \tag{2.48}$$

وإذا وضعنا الشرط

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0 \tag{2.49}$$

إذاً فإن y_p' المعطى في (2.48) يتحول إلى

$$y_p' = u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x) \tag{2.50}$$

وبتفاضل (2.50) نحصل على

$$\begin{aligned} y_p'' &= u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) \\ &+ v'(x)y_2'(x) + v(x)y_2''(x) \end{aligned} \tag{2.51}$$

وبالتعويض في المعادلة (2.38) عن y_p, y_p', y_p'' من المعادلات (2.47), (2.50), (2.51) بالترتيب نجد أن

$$u(x)\left[y_1''(x)+Ay_1'(x)+By_1(x)\right]$$

$$+v(x)\left[y_2''(x)+Ay_2'(x)+By_2(x)\right]$$

$$+\left[u'(x)y_1'(x)+v'(x)y_2'(x)\right]=G(x) \tag{2.52}$$

وبما أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان أساسيان للمعادلة المتجانسة المقابلة (2.39)، إذاً فهما يحققانها، إذاً

$$y_1''(x)+Ay_1'(x)+By_1(x)=0 \tag{2.53}$$

$$y_2''(x)+Ay_2'(x)+By_2(x)=0 \tag{2.54}$$

بالتعويض من (2.54) ,(2.53) في (2.52) نحل على

$$u'(x)y_1'(x)+v'(x)y_2'(x)=G(x) \tag{2.55}$$

بحل المعادلتين (2.55) ,(2.49) نحصل على

$$u(x)=\int \frac{-y_2G(x)}{y_1y_2'-y_2y_1'}dx+C_1 \tag{2.56}$$

$$v(x)=\int \frac{y_1G(x)}{y_1y_2'-y_2y_1'}dx+C_2 \tag{2.57}$$

وبما أننا نبحث عن أي حل خاص يحقق المعادلة غير المتجانسة وليس حلاً خاصاً معيناً فيمكن لنا عندئذٍ أن

نختار ثوابت التكاملات السابقة؛ أي الثابتين C_1، C_2 ليكونا أصفاراً. وبالتالي وباستخدام تعريف الفرونيسكان نجد أن

$$u(x) = \int \frac{-y_2 G(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx = \int \frac{-y_2 G(x)}{W(y_1, y_2)} dx \tag{2.58}$$

$$v(x) = \int \frac{y_1 G(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx = \int \frac{y_1 G(x)}{W(y_1, y_2)} dx \tag{2.59}$$

وهكذا، نجد أنه بمعرفة كل من الحلين الأساسيين $y_1(x)$، $y_2(x)$ ودالة الهدف $G(x)$ يمكن أن نحصل على الدالتين $u(x)$، $v(x)$ باستخدام (2.59)، (2.58)، ومن ثم نحصل على الحل الخاص y_p باستخدام (2.47).

مثال 2.10 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 5y' + 6y = x^2 + 2x$$

الحل نحاول أن نوجد ـ أولاً ـ الحلول الأساسية $y_1(x), y_2(x)$، للمعادلة المتجانسة المقابلة

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

المعادلة المميزة لها تعطي

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -2, \ r_2 = -3$$

وبما أن الجذرين حقيقيان ومختلفان، إذاً الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة (الحل المكمل للمعادلة غير المتجانسة المعطاة) هو

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

حيث نجد أن الحلين الأساسيين هما

$$y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = e^{-3x}$$

باستخدام (2.47) نضع y_p في الشكل

$$y_p = u(x)e^{-2x} + v(x)e^{-3x}$$

وللحصول على الكميات $u(x), v(x)$ نستخدم (2.59), (258)، لذلك نحسب ـ أولاً ـ الفرونيسكان $W(y_1, y_2)$ فنجد أنه

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x} \neq 0$$

بالتالي فإن

$$u(x) = \int \frac{-e^{-3x}\left(x^2 + 2x\right)}{-e^{-5x}} dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)$$

وأيضاً فإن

$$v(x) = \int \frac{e^{-2x}\left(x^2 + 2x\right)}{-e^{-5x}} dx = \frac{e^{3x}}{3}\left(-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right)$$

إذاً الحل الخاص للمعادلة المعطاة هو

$$y_p = u(x)e^{-2x} + v(x)e^{-3x}$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x} + \frac{e^{3x}}{3}\left(-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right)e^{-3x}$$

$$y_p = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{18} - \frac{11}{108}$$

✍.

مثال 2.11 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 4y = \tan(2x)$$

الحل نوجد ــ أولاً ــ الحلين الأساسيين $y_1(x)$، $y_2(x)$ للمعادلة المتجانسة المقابلة

$$y'' + 4y = 0$$

المعادلة المميزة لها تعطي

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2i$$

ولأن الجذرين مركبان، إذاً الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة (الحل المكمل للمعادلة غير المتجانسة المعطاة) هو

$$y_c = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

حيث نجد أن الحلين الأساسيين هما

$$y_1 = \cos(2x), \quad y_2 = \sin(2x)$$

باستخدام (2.47) نضع y_p في الشكل

$$y_p = u(x)\cos(2x) + v(x)\sin(2x)$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

إذاً فإن

$$u(x) = \int \frac{-\sin(2x)\tan(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos(2x)} = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{4}\ln\left|\sec(2x) + \tan(2x)\right|$$

وأيضاً

$$v(x) = \int \frac{\cos(2x)\tan(2x)}{2}dx = -\frac{1}{4}\cos(2x)$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = u(x)\cos(2x) + v(x)\sin(2x)$$

$$= -\frac{1}{4}\cos(2x)\ln\left|\sec(2x) + \tan(2x)\right|$$

✍.

مثال 2.12 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

الحل نوجد ــ أولاً ــ الحلين الأساسيين $y_1(x)$، $y_2(x)$ للمعادلة المتجانسة المقابلة أي للمعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

المعادلة المميزة تعطي

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2$$

إذاً

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x}$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}$$

إذاً لدينا

$$u(x) = \int \frac{-e^{2x} \dfrac{1}{1+e^{-x}}}{e^{3x}} dx = \int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \ln\left(1+e^{-x}\right)$$

وأيضاً

$$v(x) = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx = \int \left(e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx$$

$$= -e^{-x} + \ln\left(1+e^{-x}\right)$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x) = e^x \ln\left(1+e^{-x}\right)$$

$$+ e^{2x}\left[-e^{-x} + \ln\left(1+e^{-x}\right)\right]$$

.✍

مثال 2.13 أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + 4y = \cos(2x)$$

الحل أولاً: باستخدام طريقة تغيير البارامترات. نوجد ــ أولاً ــ $y_1(x), y_2(x)$ للمعادلة المتجانسة المقابلة أي للمعادلة

$$y'' + 4y = 0$$

المعادلة المميزة تعطي

$$r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2i$$

إذاً

$$y_2 = \sin(2x), \; y_1 = \cos(2x)$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

إذاً

$$u(x) = \int \frac{-\sin(2x)\cos(2x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (-2\sin(2x))\cos(2x) dx = \frac{\cos^2(2x)}{8}$$

وأيضاً

$$v(x) = \int \frac{\cos^2(2x)}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos(4x)) dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin(4x)}{16}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{\cos^3(2x)}{8} + \sin(2x)\left[\frac{x}{4} + \frac{\sin(4x)}{16}\right]$$

ثانياً: الحصول على الحل الخاص باستخدام طريقة مقارنة المعاملات. نفرض أن

$$y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

$$y_p' = 2b\cos(2x) - 2a\sin(2x)$$

$$y_p'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) + 4(a\cos(2x) + b\sin(2x)) = 0$$

وبالتالي فإن

$$y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

لا يمكن أن يكون حلاً خاصاً يحقق المعادلة غير المتجانسة المعطاة، وذلك لأنه يحقق المعادلة المتجانسة المقابلة أي يحقق المعادلة $y'' + 4y = 0$. الأمر الذي يعني المستحيل، لذا نبحث عن الحل الخاص في الشكل

$$y_p = x(a\cos(2x) + b\sin(2x))$$

بالتفاضل نجد أن

$$y_p' = x(2b\cos(2x) - 2a\sin(2x)) + (a\cos(2x) + b\sin(2x))$$

كما نجد أن

$$y_p'' = x(-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x))$$
$$+(2b\cos(2x) - 2a\sin(2x)) + (2b\cos(2x) - 2a\sin(2x))$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة، نحصل على

$$(4b\cos(2x) - 4a\sin(2x)) = \cos(2x)$$

بمقارنة المعاملات نجد أن $b = \frac{1}{4}$ ونحصل على الحل الخاص في الشكل

$$y_p = \frac{x}{4}\sin(2x)$$

✍.

مثال 2.14 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' + \frac{4y}{x} = x^4$$

الحل هذه معادلة من الرتبة الأولى، لكننا سنحاول حلها باستخدام طرق حل معادلات الرتبة الثانية. فنوجد - أولاً - الحل المكمل $y_c(x)$ للمعادلة المعطاة، والذي يعتبر الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة أي المعادلة

$$y' + \frac{4y}{x} = 0$$

طبعاً لايمكن استخدام طريقة المعادلة المميزة، وذلك لأن معاملات المعادلة دوال وليست ثوابت. على أية حال هذه معادلة انفصالية من الرتبة الأولى. بفصل المتغيرات، والتكامل

$$\frac{dy}{y}+4\frac{dx}{x}=0 \quad \Rightarrow \quad \ln(y)+\ln\left(x^4\right)=\ln(c)$$

وبالتالي فإن

$$y_c=\frac{c}{x^4}$$

نفرض الحل الخاص y_p في الشكل

$$y_p=u(x)x^{-4} \quad \Rightarrow \quad y_p{}'=u'(x)x^{-4}-4u(x)x^{-5}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$u'(x)x^{-4}-4u(x)x^{-5}+\frac{4}{x}\left(u(x)x^{-4}\right)=x^4$$

ومنها فإن

$$u'(x)=x^8 \quad \Rightarrow \quad u(x)=\frac{x^9}{9}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p=\frac{x^9}{9}x^{-4}=\frac{x^5}{9}$$

ويكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة المعطاة هو مجموع الحلين الخاص والمكمل أي أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y = \frac{c}{x^4} + \frac{x^5}{9}$$

بالمناسبة فإن المعادلة $y' + \frac{4y}{x} = x^4$ هي معادلة خطية، حيث نجد أن $Q(x) = \frac{4}{x}$، $R(x) = x^4$. إذاً العامل التكاملي (1.28) هو

$$\mu(x) = e^{\int Q(x)dx} = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln(x)} = e^{\ln(x^4)} = x^4$$

الحل العام (1.30) يعطي

$$y_g(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int R(x)\mu(x)dx + \frac{C}{\mu(x)}$$

$$= \frac{1}{x^4}\int x^8 dx + \frac{C}{x^4} = \frac{x^9}{9x^4} + \frac{C}{x^4} = \frac{x^5}{9} + \frac{C}{x^4}$$

وهو نفس الحل السابق.

✍.

2.6 طريقة الحصول على الحلول الخاصة باستخدام المؤثرات التفاضلية *(Differential Operators)*

من دراستنا السابقة لحساب التفاضل، نعلم أنه عند إجراء عملية التفاضل مرة واحدة على الدالة $f(x)$ مثلاً، فإننا

نحصل على دالة أخرى تسمى المشتقة الأولى ونرمز لها بالرمز $f'(x)$. هذه المشتقة الأولى هي نفسها دالة في نفس المتغير x، لكن بصفات وخصائص مختلفة. إذاً يمكن اعتبار أن عملية التفاضل تؤثر على الدالة فتغير من شكلها الرياضي لتعطي في النهاية دالة أخرى. رياضياً يمكن أن نعبر عن ذلك في الشكل

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=f'(x) \tag{2.60}$$

تعريف 2.8 المؤثر التفاضلي
Differential Operator

يُعرف المؤثر التفاضلي من الرتبة الأولى على أنه المؤثر الذي يأخذ الشكل $D=\frac{d}{dx}$ وإذا أثر على دالة ما كان الناتج المشتقة الأولى لها. بالمثل يمكن تعريف المؤثرات التفاضلية من الرتبة الثانية، الثالثة، ...، الرتبة النونية على أنها

$$D^2=\frac{d^2}{dx^2};\ D^3=\frac{d^3}{dx^3};\ \ldots;\ D^n=\frac{d^n}{dx^n} \tag{2.61}$$

✍.

تعريف 2.9 دالة كثيرة الحدود من الدرجة n في المؤثر التفاضلي D

تُعرف دالة كثيرة الحدود من الدرجة n في المؤثر التفاضلي D على أنها كثيرة الحدود

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \cdots + a_0 \tag{2.62}$$

حيث $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ هي معاملات $L(D)$.

ملاحظة

يجب ملاحظة أن $L(D)$ هو – أيضاً – مؤثر تفاضلي. كما أنه مؤثر تفاضلي خطي *(Linear Operator)*، وذلك لأنه بالتأثير بالمؤثر $L(D)$ على $y(x)$ – مثلاً – نحصل على

$$\begin{aligned} L(D)y &= \left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_0\right) y \\ &= a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y \end{aligned} \tag{2.63}$$

الأمر الذى يعني أن المؤثر التفاضلي $L(D)$ هو مؤثر خطي.

هذا، وسوف نقوم الآن بإثبات بعض النظريات المفيدة عن المؤثر التفاضلي $L(D)$.

نظرية 2.10

إذا كان $L(D)$ مؤثر تفاضلي فإن النظريات الآتية كلها صحيحة.

(1) $L(D)e^{\alpha x} = e^{\alpha x} L(\alpha)$

(2) $L(D)e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} L(D + \alpha) f(x)$

(3) $L\left(D^2\right)\cos kt = L\left(-k^2\right)\cos kt$

(4) $L\left(D^2\right)\sin(kt) = L\left(-k^2\right)\sin(kt)$

(5) $D^n\left(\frac{t^n}{n!}\right)=1$

.✍

البرهان (1) لدينا

$$L(D)e^{\alpha x}=\left(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0\right)e^{\alpha x}$$

$$=a_n\alpha^ne^{\alpha x}+a_{n-1}\alpha^{n-1}e^{\alpha x}+\cdots+a_1\alpha e^{\alpha x}+a_0e^{\alpha x}$$

$$=e^{\alpha x}\left(a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0\right)=e^{\alpha x}L(\alpha)$$

(2) بما أن

$$D\left(e^{\alpha x}f(x)\right)=e^{\alpha x}Df(x)+\alpha e^{\alpha x}f(x)$$

$$e^{\alpha x}\left(Df(x)+\alpha f(x)\right)=e^{\alpha x}(D+\alpha)f(x)$$

إذاً

$$L(D)e^{\alpha x}f(x)$$

$$=\left(a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0\right)e^{\alpha x}f(x)$$

$$=e^{\alpha x}\left(a_n(D+\alpha)^n+a_{n-1}(D+\alpha)^{n-1}+\cdots+a_0\right)f(x)$$

$$=e^{\alpha x}L(D+\alpha)f(x)$$

(3) البرهان بديهي، متى علمنا أن

$$D^2(\cos(kt))=D(-k\sin(kt))=-k^2\cos(kt)$$

(4) البرهان بديهي، متى علمنا أن

$$D^2(\sin(kt)) = D(k\cos(kt)) = -k^2\sin(kt)$$

.✍

تعريف 2.11 **المؤثر التفاضلي العكسي**
Inverse Differential Operator

إذا كان المؤثر التفاضلي، $L(D)$، ’يعرف على أنه عملية تفاضل للدالة التي يؤثر عليها، فإن المؤثر التفاضلي العكسي ويرمز له بالرمز $L^{-1}(D)$ يعرف على أنه المؤثر العكسي للمؤثر التفاضلي $L(D)$، أي أنه عملية تكامل للدالة التي يتم التأثير عليها. بلغة الرياضيات فإن هذا يعني أن

$$L^{-1}(D)[Q(x)] = \int_{x_0}^{x} Q(t)dt \tag{2.64}$$

.✍

نظرية 2.12 لنعتبر المعادلة التفاضلية

$$L(D)y = Q(x) \tag{2.65}$$

والشروط الابتدائية

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{2.66}$$

إذاً يوجد للمسألة الابتدائية (2.65)-(2.66) حل وحيد هو

$$y(x) = L^{-1}(D)[Q(x)] \tag{2.67}$$

✍.

نظرية 2.13 إذا كان $\frac{1}{L(D)}$ يرمز للمؤثر التفاضلي العكسي للمؤثر $L(D)$ فإن العلاقات الآتية كلها صحيحة.

(1) $\frac{1}{L(D)}e^{kt} = \frac{1}{L(k)}e^{kt}, \quad L(k) \neq 0$

(2) $\frac{1}{D^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}$

(3) $\frac{1}{(D-k)^r L(D)}e^{kt} = \frac{e^{kt}}{L(k)} \cdot \frac{t^r}{r!}, \quad L(k) \neq 0$

(4) $\frac{1}{L(D)}e^{kt} f(x) = e^{kt} \frac{1}{L(D+k)} f(x)$

(5) $\frac{1}{L(D^2)}\begin{cases}\cos(kt) \\ \sin(kt)\end{cases} = \frac{1}{L(-k^2)}\begin{cases}\cos(kt) \\ \sin(kt)\end{cases}, \quad L(-k^2) \neq 0$

البرهان إثبات العلاقة رقم (3)

لدينا

$$\frac{1}{(D-k)^r L(D)}e^{kt} = \frac{1}{(D-k)^r} \cdot \frac{e^{kt}}{L(k)} = \frac{1}{L(k)} \cdot \frac{e^{kt}}{(D-k)^r}$$

$$= \frac{e^{kt}}{L(k)} \frac{1}{(D+k-k)^r} \cdot 1 = \frac{e^{kt}}{L(k)} \frac{1}{D^r} \cdot 1 = \frac{e^{kt}}{L(k)} \frac{t^r}{r!}, \ L(k) \neq 0$$

✍.

مثال 2.15 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 6y' + 9y = 50e^{2x}$$

الحل المعادلة المتجانسة المقابلة هي

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

المعادلة المميزة هي

$$(r+3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = -3$$

إذاً الحل المكمل هو

$$y_c = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$$

لإيجاد الحل الخاص يمكن وضع المعادلة غير المتجانسة المعطاة في الشكل

$$D^2 y + Dy + 9y = 50e^{2x}$$

أو

$$\left(D^2 + D + 9\right)y = 50e^{2x} \quad \Rightarrow \quad (D+3)^2 y = 50e^{2x}$$

وبالتالي فإن الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{(D+3)^2} 50e^{2x} = \frac{50e^{2x}}{(2+3)^2} = 2e^{2x}$$

إذاً الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_g = e^{-3x}\left(c_1 + c_2 x\right) + 2e^{2x}$$

.✍

مثال 2.16 أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\left(D^3+6D^2+11D+6\right)y=2\sin(2x)$$

الحل الحل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{D^3+6D^2+11D+6}2\sin(2x)$$

$$=\frac{1}{DD^2+6D^2+11D+6}2\sin(2x)$$

$$=\frac{2}{-4D-24+11D+6}\sin(2x)=\frac{2}{7D-18}\sin(2x)$$

$$=\frac{2(7D+18)}{(7D)^2-18^2}\sin(2x)=\frac{2(7D+18)}{-4\cdot 49-18^2}\sin(2x)$$

$$=\frac{-1}{260}\left(7D(\sin(2x))+18\sin(2x)\right)$$

$$=\frac{-7}{130}\cos(2x)-\frac{9}{130}\sin(2x)$$

✍.

مثال 2.17 أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\left(D^2+4\right)y=\cos(2x)$$

الحل في هذه الحالة لايمكن إيجاد الحل الخاص باستخدام الجزء الخامس من نظرية (2.14)، وذلك لأن هذا يؤدى إلى المستحيل، حيث أن

$$y_p = \frac{1}{D^2+4}\cos(2x) = \frac{1}{-4+4}\cos(2x) \to \infty$$

لذلك نبحث عن مخرج من هذه الإشكالية. دعنا نعتبر أن الحل الخاص هو الجزء الحقيقي من الحل

$$\frac{1}{D^2+4}e^{i(2x)}$$

وذلك باعتبار أن

$$e^{i(2x)} = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

إذاً الحل الخاص المطلوب هو

$$y_p = \text{Re}\left[\frac{1}{D^2+4}e^{(2i)x}\right] = \text{Re}\left[e^{(2i)x}\cdot\frac{1}{(D+2i)^2+4}\cdot 1\right]$$

$$= \text{Re}\left[e^{(2i)x}\frac{1}{D^2+4iD}\cdot 1\right] = \text{Re}\left[e^{(2i)x}\frac{1}{D(D+4i)}\cdot 1\right]$$

$$= \text{Re}\left[e^{(2i)x}\frac{1}{4iD\left(1+\frac{D}{4i}\right)}\cdot 1\right] = \text{Re}\left[\frac{e^{(2i)x}}{4i}\frac{1}{D}\left(1+\frac{D}{4i}\right)^{-1}\right]$$

$$= \text{Re}\left[\frac{e^{(2i)x}}{4i} \times \frac{1}{D}\left(1 - \frac{D}{4i} + \frac{D^2}{4i^2} - \cdots\right) \cdot 1\right]$$

وبما أن التفاضل من أية درجة للدالة الثابتة يساوي الصفر، إذاً فإن

$$\left(1 - \frac{D}{4i} + \frac{D^2}{4i^2} - \cdots\right) \cdot 1 = 1 - \frac{D}{4i}(1) + \frac{D^2}{4i^2}(1) - \ldots = 1$$

وبالتالي فإن

$$y_p = \text{Re}\left[\frac{e^{(2i)x}}{4i} \cdot \frac{1}{D} \cdot 1\right] = \text{Re}\left[\frac{e^{(2i)x}}{4i} \cdot x\right]$$

لاحظ أن $\frac{1}{D} \cdot (1) = \int (1)dx = x$. إذاً

$$\text{Re}\left[\frac{xe^{(2i)x}}{4i}\right] = \text{Re}\left[\frac{xe^{i(2x)}}{4i}\right] = \text{Re}\left[\frac{x\cos(2x) + ix\sin(2x)}{4i}\right]$$

$$= \text{Re}\left[\frac{ix\cos(2x)}{-4} + \frac{x\sin(2x)}{4}\right]$$

إذاً الحل الخاص هو $y_p = \frac{x}{4}\sin(2x)$

✍.

مثال 2.18 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 7y' + 12y = 8e^{3x}\sin(2x)$$

الحل المعادلة المميزة تعطي

$$r^2 - 7r + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3 \ , \ r_2 = 4$$

إذاً الحل المكمل هو

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

والحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 7D + 12} 8e^{3x} \sin(2x)$$

$$= \frac{8e^{3x}}{(D+3)^2 - 7(D+3) + 12} \sin(2x) = \frac{8e^{3x}}{D^2 - D} \sin(2x)$$

$$= \frac{8e^{3x}}{-4 - D} \sin(2x) = \frac{-8e^{3x}(D-4)}{D^2 - 16} \sin(2x)$$

$$= \frac{2}{5} e^{3x} \left(2\cos(2x) - 4\sin(2x)\right)$$

إذاً الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{2}{5} e^{3x} \left(2\cos(2x) - 4\sin(2x)\right)$$

.✍

2.7 طريقة اختزال الرتبة

Reduction of Order Method

هذه الطريقة ُتستخدم فقط في حالة معادلات الرتبة الثانية. وهي تصلح للمعادلات الخطية، والمعادلات غير الخطية.

وفكرة هذة الطريقة تبدو من عنوانها، حيث يتم اختزال رتبة المعادلة. فمثلاً المعادلة من الرتبة الثانية تختزل إلى الرتبة الأولى والتي يتم حلها بالطرق المعطاة في الباب الأول. لتسهيل تطبيق طريقة اختزال الرتبة نقسمها إلى حالتين.

الحالة الأولى

المتغير التابع y لايظهر في المعادلة. في هذه الحالة فإن المعادلة المعطاة عادة ما تظهر في الشكل $f(x, y', y'') = 0$، ولذا نستخدم التعويض

$$p = y' \tag{2.68}$$

وتتحول عندئذٍ المعادلة من الرتبة الثانية إلى الرتبة الأولى وتأخذ الشكل

$$f(x, p, p') = 0 \tag{2.69}$$

الحالة الثانية

المتغيرالمستقل x لايظهر في المعادلة. في هذه الحالة فإن المعادلة تظهر في الشكل $f(y, y', y'') = 0$، ولذا نستخدم نفس التعويض (2.68) بالإضافة إلى التعويض

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy} \tag{2.70}$$

الأمر الذي يعني أنه في حالة عدم ظهور x يجب أن نستخدم ـ معاً ـ التعويضين

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy} \tag{2.71}$$

وهكذا، تتحول المعادلة من الرتبة الثانية إلى الرتبة الأولى، وتأخذ الشكل

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{2.72}$$

مثال 2.19 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$xy'' + 2y' = 4x$$

الحل

هذه معادلة ذات معاملات متغيرة وليست ثابتة، وبالتالي لايمكن الحصول على حلها المكمل بطريقة المعادلة المميزة. على أية حال نحاول اختزال رتبتها. بما أن المعادلة لاتحتوي على المتغير التابع y، إذاً نضع $p = y'$ فتتحول المعادلة إلى

$$xp' + 2p = 4x \;\Rightarrow\; p' + \frac{2}{x}p = 4$$

وهذه الأخيرة هي معادلة خطية، فيها $Q(x) = \frac{2}{x},\ R(x) = 4$. إذاً العامل التكاملي هو

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = x^2$$

إذاً الحل العام هو

$$p = \frac{1}{x^2}\int 4\left(x^2\right)dx + \frac{c}{x^2} = \frac{4}{x^2}\int x^2 dx + \frac{c}{x^2} = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2}$$

وبالعودة إلى التعويض

$$y' = p = \frac{dy}{dx}$$

نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2} \quad \Rightarrow \quad dy = \left(\frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2}\right)dx$$

إذاً فإن

$$y_g(x) = \int\left(\frac{4}{3}x + \frac{c}{x^2}\right)dx = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2c}{x} + c_1$$

✍.

مثال 2.20 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$yy'' = 1 + \left(y'\right)^2$$

الحل هذه معادلة يمكن اختزال رتبتها. بما أن المعادلة لاتحتوي على المتغير المستقل x، إذاً نضع

$$p = y', \;\; p\frac{dp}{dy} = y''$$

فتتحول المعادلة إلى

$$yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{pdp}{1 + p^2}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\left(1 + p^2\right) + \ln c$$

أو

$$y = c\sqrt{1+p^2} \quad \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}$$

وبالعودة إلى التعويض: $y' = p = \frac{dy}{dx}$، وفصل المتغيرات نجد أن

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c^2}-1}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}} = \pm\frac{1}{c}\,dx$$

وبالتكامل، إذاً

$$\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) = \pm\frac{1}{c}(x+c_1)$$

أو

$$y = c\cosh\left(\pm\frac{1}{c}(x+c_1)\right)$$

إذاً، الحل العام هو

$$y_g(x) = c\cosh\left(\frac{1}{c}(x+c_1)\right); \quad \cosh(x) = \cosh(-x)$$

✍.

مثال 2.21 أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y = 0$$

الحل هذه معادلة يمكن اختزال رتبتها. بما أن المعادلة لاتحتوي على المتغير المستقل x، إذاً نضع

$$y' = p,\ y'' = p\frac{dp}{dy}$$

فتتحول المعادلة إلى

$$p\frac{dp}{dy}=y$$

بفصل المتغيرات، والتكامل، إذاً

$$\int pdp=\int ydy+c_1 \;\Rightarrow\; \frac{p^2}{2}=\frac{y^2}{2}+c_1$$

وبالعودة إلى التعويض $p=\frac{dy}{dx}$ نجد أن

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2+2c_1$$

نضع $2c_1=-c^2$ فنحصل على

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^2-c^2}$$

وبفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}=dx \;\Rightarrow\; \pm\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}=\int dx+C$$

أو

$$\pm\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c}\right)=x+C \;\Rightarrow\; \frac{y}{c}=\cosh\left[\pm(x+C)\right]$$

وبما أن

$$\cosh(x+C)=\cosh\left[-(x+C)\right]$$

إذاً فإن الحل العام هو

$$y_g(x) = c\cosh(x+C)$$

بالمناسبة

فإن المعادلة $y'' - y = 0$ هي معادلة متجانسة من الرتبة الثانية، ويمكن بالطبع الحصول على الحل العام لها باستخدام طريقة المعادلة المميزة.

بما أن

$$r^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = 1,\; r_2 = -1$$

إذاً الجذران حقيقيان ومختلفان، وبالتالي فإن الحل العام يمكن أن نحصل عليه باستخدام (2.22) في الشكل

$$y_g(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

وهي نفس النتيجة السابقة. لاحظ أن

$$y_g(x) = c\cosh(x+C) = c\left\{\frac{e^{(x+C)} + e^{-(x+C)}}{2}\right\}$$

$$= \frac{ce^C}{2}e^x + \frac{ce^{-C}}{2}e^{-x} = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

حيث تم وضع

$$c_1 = \frac{ce^C}{2},\quad c_2 = \frac{ce^{-C}}{2}$$

✍.

2.8 مسائل

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية

(1) $y'' - y' - 2y = 2x^2 + 5$ (2) $xy'' = 12 - y'$

(3) $y'' + 4y = 8x^3 - 20x^2 + 16x - 18$ (4) $xy'' - 4y' = 5$

(5) $y'' - 6y' + 8y = 3e^x$ (6) $xy'' + 2y' = 3x$

(7) $y'' - 3y' + 2y = 10\sin(x)$

(8) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}$

(9) $y'' - 4y' + 13y = 3e^{2x} - 5e^{3x}$

(10) $y'' + 9y = 3\operatorname{cosec}(x)$

(11) $y'' + 4y' = -3\cos(3x) + \sin(2x)$

(12) $y'' - y' + 2y = \sin(e^{-x})$

(13) $xy'' = 2 + y'$

(14) $y'' + 4y' = 3\cos(2x) + \sin(3x)$

(15) $2y'' = 1 + y$

(16) $y'' - 4y' + y = 3e^{2x} - 5e^{3x}$

(17) $y'' - 4y = 5\sinh(2x)$

(18) $y'' - 2y' - 15y = \sinh^2(3x)$

(19) $y'' + 9y = 3\sec(x)$

(20) $y'' - 3y' + 2y = 10\cos(x)$

(21) $y'' - 3y' + 2y = \cos(e^{-x})$

(22) $y'' - y' - 2y = 2x^2 - 15$

(23) $y'' - y' - 12y = 2\sinh^2(x)$

(24) $y'' + y = 8x^3 - 20x^2 - 18$

أوجد باستخدام المؤثر التفاضلي الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الآتية

(25) $\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^3$

(26) $\left(D^2+4\right)y=\sin 2x$

(27) $\left(D^2-4D+3\right)y=x^3$

(28) $\left(D^2-6D+1\right)y=e^{3x}\cos(4x)$

(29) $\left(D^2-6D+13\right)y=e^{2x}\cos 2x$

(30) $\left(D^2-5D+3\right)y=2x^3$

(31) $\left(D^2+9\right)y=\sin 3x$

(32) $\left(D^2-5D+6\right)y=e^{2x}x^3+x$

****

الباب 3

معادلات أويلر التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية
Euler Linear Differential Equations of the Second Order

في الباب السابق تعاملنا مع معادلات الرتبة الثانية الخطية ذات المعاملات الثابتة. فقدمنا طريقة واحدة للحصول على الحل العام للمعادلات المتجانسة وهي طريقة المعادلة المميزة. كما قدمنا ثلاث طرق للحصول على الحل الخاص في حالة المعادلات غير المتجانسة: طريقة مقارنة المعاملات، طريقة تغيير البارامترات، ثم طريقة المؤثرات التفاضلية.

في هذا الباب نتعامل مع معادلات الرتبة الثانية الخطية ولكن ذات المعاملات المتغيرة. أي المعادلات التي معاملاتها دوال وليست ثوابت. ولأنه لاتوجد نظرية عامة تضمن وجود ووحدانية حل معادلات الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة في شكلها العام فقد تم تقسيم هذه المعادلات إلى أنواع مختلفة ومتنوعة ندرس منها في هذا الباب المعادلات التي تسمى "**معادلات أويلر**" نسبة إلى عالم الرياضيات السويسري أويلر *(Euler, L., 1707 - 1783)*. على أية حال، لنبدأ بتعريف معادلة أويلر التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية.

تعريف 3.1 تعرف معادلة أويلر التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية على أنها المعادلة التي تأخذ الشكل

$$x^2y'' + axy' + by = E(x); \quad x \in I \tag{3.1}$$

حيث a, b ثوابت، بينما دالة الهدف $E(x)$ هي دالة غير صفرية، على الأقل لقيمة واحدة من القيم التي تنتمي إلى الفترة I. أي أن $E(x) \neq 0$ على الأقل لقيمة وحيدة، $x \in I$.

.✍

تعريف 3.2 إذا كانت الدالة $E(x)$ في المعادلة (3.1) دالة صفرية لكل قيم الفترة I، أي إذا كان

$$E(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

فإن المعادلة (3.1) تسمى معادلة أويلر الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية، وتأخذ عندئذٍ الشكل

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{3.2}$$

.✍

3.1 مقدمة

الحل العام لمعادلة أويلر غير المتجانسة (3.1) يتكون أيضاً من مجموع حلين. الأول هو الحل العام للمعادلة المتجانسة

المقابلة (معادلة (3.2)) بالإضافة إلى أي حل خاص يحقق المعادلة غير المتجانسة نفسها. للحصول على الحل العام لمعادلة أويلر المتجانسة رقم (3.2) توجد هناك طريقتان. الطريقة الأولى تعتمد على إيجاد جذور المعادلة المميزة، والتي يمكن الحصول عليها بطريقة مشابهة لطريقة الحصول على المعادلة المميزة في حالة المعادلات ذات المعاملات الثابتة، الطريقة الثانية تستخدم تعويضاً معيناً يحول معادلة أويلر المتجانسة (معاملاتها دوال وليس ثوابت) إلى معادلة متجانسة ذات معاملات ثابتة، وبالتالي يمكن الحصول على حلها العام باستخدام المعادلة المميزة (2.18)، أما بالنسبة إلى الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة فيمكن الحصول عليه باستخدام طريقة تغيير البارامترات فقط.

3.2 الطريقة الأولى لحل معادلة أويلر المتجانسة

نفرض أن حل معادلة أويلر الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية (المعادلة رقم (3.2)) هو

$$y(x) = x^r \tag{3.3}$$

على هذا ينبغي البحث عن قيم البارامتر r للحصول على الحل في الصورة النهائية. بتفاضل (3.3) نحصل على

$$y = x^r, \quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \tag{3.4}$$

بالتعويض من (3.4) ,(3.3) في (3.2)، نجد أن

$$r(r-1)x^r + arx^r + bx^r = 0 \tag{3.5}$$

وبما أن $x^r \neq 0$، إذاً يمكن قسمة المعادلة (3.2) على x^r فنحصل على المعادلة المميزة لمعادلة أويلر في الصورة

$$r(r-1) + ar + b = 0; \quad x \neq 0 \tag{3.6}$$

أو الصورة

$$\boxed{r^2 + (a-1)r + b = 0} \tag{3.7}$$

جذور هذه المعادلة هي

$$r_{1,2} = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \tag{3.8}$$

وبالتالي لدينا ثلاثة احتمالات بالنسبة للجذرين r_1, r_2. فإما أنهما حقيقيان ومختلفان، أو حقيقيان ومكراران، إما أنهما مركبان.

الاحتمال الأول

الجذران r_1, r_2 حقيقيان ومختلفان. في هذه الحالة فإن المميز، $(a-1)^2-4b$، أكبر من الصفر.

نفرض أن

$$(a-1)^2-4b=\lambda>0$$

بالتعويض في (3.8) نجد أن

$$r_1=\frac{-(a-1)+\sqrt{\lambda}}{2},\quad r_2=\frac{-(a-1)-\sqrt{\lambda}}{2} \tag{3.9}$$

إذاً هناك حلان للمعادلة (3.2) هما

$$y_1(x)=x^{r_1},\ y_2(x)=x^{r_2} \tag{3.10}$$

حيث الجذران r_1, r_2 يعطيان من(3.9). هذا، ولنبحث الآن للتأكد من أن $y_1(x), y_2(x)$ لايرتبطان خطياً. من نظرية (2.7) نجد أن

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1x^{r_1-1} & r_2x^{r_2-1} \end{vmatrix}$$

$$=r_2x^{r_1+r_2-1}-r_1x^{r_1+r_2-1}=(r_2-r_1)x^{r_1+r_2-1}\neq 0$$

وذلك لأن $r_2\neq r_1$. وطبقاً للنظرية رقم (2.7) فإن $y_1(x), y_2(x)$ يعتبران حلين أساسيين للمعادلة (3.2)، ويأخذ الحل العام في هذه الحالة الشكل

$$\boxed{y_g(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}} \qquad (3.11)$$

حيث الجذران r_1, r_2 يُعطيان من المعادلـة (3.9)، أمـا c_1, c_2 فهما ثابتان اختياريان.

الاحتمال الثاني

الجـذران r_1, r_2 حقيقيـان ومكـرران. فــي هـذه الحالــة فــإن المميز، $(a-1)^2 - 4b$، يساوي الصفر.

إذاً

$$(a-1)^2 - 4b = 0$$

وبالتالي لدينا في هذه الحالـة جـذر واحـد مكـرر مرتيـن هـو $r = \frac{1-a}{2}$. فيكون الحل الأول هو $y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$. للحصول علـى الحل الثانـي نفرض أن

$$y_2(x) = y_1(x)\phi(x) = \phi(x)x^{\frac{1-a}{2}}$$

بـالتعويض عـن $y_2(x)$، $y_2'(x)$، $y_2''(x)$ فىالمعادلـة (3.2)، نحصل (بعد الاختصار) علـى

$$\phi(x) = \ln(x)$$

إذاً الحل الثانـي هو

$$y_2(x) = x^{\frac{1-a}{2}} \ln(x)$$

ويكون الحل العام هو

$$\boxed{y_g(x) = x^{\frac{1-a}{2}}\left(c_1 + c_2 \ln(x)\right)} \tag{3.12}$$

الاحتمال الثالث

في حالة أن الجذرين r_1, r_2 مركبان فإن المميز $(a-1)^2 - 4b$ يكون أقل من الصفر.

إذاً

$$(a-1)^2 - 4b < 0$$

وبالتالي فإن

$$r_{1,2} = \frac{(1-a) \pm i\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2}$$

فإذا وضعنا

$$p = \frac{1-a}{2} \quad , \quad q = \frac{\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2}$$

فإن الجذرين يأخذان الأشكال

$$r_{1,2} = p \pm iq$$

إذاً هناك حلان هما

$$y_1(x) = x^{p+iq} \,,\; y_2(x) = x^{p-iq} \tag{3.13}$$

لكن من المعلوم أن

$$x^{p+iq} = x^p e^{iq\ln x} = x^p\left[\cos(q\ln x) + i\sin(q\ln x)\right]$$

وأن

$$x^{p-iq} = x^p[\cos(q\ln x) - i\sin(q\ln x)]$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = c_1x^{p+iq} + c_2x^{p-iq}$$
$$= c_1\left(x^p[\cos(q\ln x) + i\sin(q\ln x)]\right)$$
$$+c_2\left(x^p[\cos(q\ln x) - i\sin(q\ln x)]\right)$$
$$= x^p((c_1+c_2)\cos(q\ln x) + (c_1 - ic_2)\sin(q\ln x))$$

أو

$$y_g = x^p(C_1\cos(q\ln x) + C_2\sin(q\ln x)) \quad (3.14)$$

حيث $C_1 = c_1 + c_2$، $C_2 = c_1 - ic_2$. وطبقاً لنظرية (2.6) التأكد من أن الحلين الأساسيين هما

$$\boxed{y_1(x) = x^p\cos(q\ln x),\ \ y_2(x) = x^p\sin(q\ln x)} \quad (3.15)$$

مثال 3.1 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2y'' + 5xy' - 2y = 0$$

الحل هذه معادلة أويلر الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية. في هذه المعادلة نجد أن $a = 5$، $b = -2$، وبالتالي فإن المعادلة المميزة (3.7) تعطي

$$r^2 + 4r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

وهما جذران حقيقيان ومختلفان، إذاً الحل العام — طبقاً للصورة (3.11) — هو

$$y_g = c_1 x^{-2+\sqrt{6}} + c_2 x^{-2-\sqrt{6}}$$

✍.

مثال 3.2 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$$

الحل في هذه المعادلة نجد أن $a = 5,\ b = 4$، وبالتالي فإن المعادلة المميزة (3.7) تعطي

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$$

إذاً لدينا جذر مكرر مرتين، وبالتالي فإن الحل العام ـ طبقاً للصورة (3.12) ـ هو

$$y_g(x) = x^{-2}\left(c_1 + c_2 \ln(x)\right)$$

✍.

مثال 3.3 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2 y'' + 4xy' + 6y = 0$$

الحل هذه معادلة أويلر الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية. في هذه المعادلة نجد أن $a=4$، $b=6$، وبالتالي فإن المعادلة المميزة (3.7) تعطي

$$r^2+3r+6=0 \Rightarrow r_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i$$

إذاً لدينا جذور تخيلية، وبالتالي فإن الحل العام – طبقاً للصورة (3.14) – هو

$$y_g=x^{-\frac{3}{2}}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln(x)\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\ln(x)\right)\right]$$

.✍

3.3 الطريقة الثانية لحل معادلة أويلر المتجانسة

هذه الطريقة تحول معادلة أويلر (3.2) إلى معادلة عادية ذات معاملات ثابتة، وذلك باستخدام التعويض

$$z=\ln(x),\ x>0 \tag{3.16}$$

بما أن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \tag{3.17}$$

وبما أن

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} \tag{3.18}$$

إذاً، بالتعويض من (3.17), (3.18) في معادلة أويلر المتجانسة (3.2) نحصل على

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}\right)+ax\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)+by=0 \tag{3.19}$$

وبعد الاختصار نجد أن

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2}+(a-1)\frac{dy}{dz}+by=0} \tag{3.20}$$

وهي بالتأكيد معادلة ذات معاملات ثابتة يمكن حلها بالطرق المعطاة في الباب الثاني.

مثال 3.4 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2y''-4xy'+6y=0$$

الحل هذه معادلة أويلر الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية. هنا $a=-4$، $b=6$. باستخدام التعويض (3.16) تتحول المعادلة المعطاة إلى الشكل (3.20)

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-1)\frac{dy}{dz}+by=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y=0$$

وهي معادلة ذات معاملات ثابتة، حيث $A=-5$، $B=6$. المعادلة المميزة لها (المعادلة (2.18)) هي

$$r^2-5r+6=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=3,\ r_2=2$$

والحل العام هو

$$y_g(z)=c_1e^{3z}+c_2e^{2z}$$

الآن بالعودة إلى التعويض $z=\ln(x)$، نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_g(x)=c_1e^{3\ln(x)}+c_2e^{2\ln(x)}=c_1x^3+c_2x^2$$

✍.

3.4 الحل الخاص لمعادلات أويلر غير المتجانسة من الرتبة الثانية

للحصول على الحل الخاص لمعادلة أويلر غير المتجانسة من الرتبة الثانية (3.1) نستخدم طريقة تغيير البارامترات. فنوجد ـ أولاً ـ الحلول الأساسية $y_1(x)$، $y_2(x)$ لمعادلة أويلر المتجانسة المقابلة

$$x^2y''+axy'+by=0$$

الآن نضع الحل الخاص لمعادلة أويلر غير المتجانسة (3.1) في الشكل

$$y_p=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)$$

للحصول على الدوال $u(x)$، $v(x)$ يتم قسمة المعادلة (3.1) على x^2 فتصبح على الصورة

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = \frac{E(x)}{x^2} \tag{3.21}$$

والتي فيهما معامل y'' هو الواحد الصحيح، وبذلك تصبح على الشكل القياسي (2.3)، وبالتالي يمكن استخدام طريقة تغيير البارامترات، مع ملاحظة أن دالة الهدف أصبحت الدالة $\frac{E(x)}{x^2}$. باستخدام العلاقات (3.58), (3.59) يمكن الحصول على الدوال $u(x)$، $v(x)$ في الأشكال

$$\boxed{u(x) = \int \frac{-y_2 E(x)}{x^2 W(y_1, y_2)}\, dx, \quad v(x) = \int \frac{y_1 E(x)}{x^2 W(y_1, y_2)}\, dx} \tag{3.22}$$

مثال 3.5 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = x^4 + x^2$$

الحل هذه معادلة أويلر الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية. نوجد - أولاً - الحل المكمل، y_c. بما أن $a = -4$، $b = 4$، إذاً، باستخدام التعويض (3.16) تتحول المعادلة المعطاة إلى الشكل (3.20)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - 5\frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

وهذه معادلة ذات معاملات ثابتة، حيث نجد أن $A=-5$، $B=4$. المعادلة المميزة لها (المعادلة (2.18)) تعطي

$$r^2-5r+4=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=1,\ r_2=4$$

وهذان جذران حقيقيان ومختلفان، وبالتالي نستخدم العلاقة (2.22). إذاً الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة (الحل المكمل للمعادلة غير المتجانسة المعطاة) هو $y_c=c_1e^{z}+c_2e^{4z}$.

وبما أن $z=\ln(x)$، إذاً فإن $y_c=c_1x+c_2x^4$. هذا، ويمكن ببساطة ـ باستخدام الطريقة الأولى ـ الحصول على الحل y_c باستخدام المعادلة المميزة (3.7) حيث نجد أن

$$r^2-5r+4=0 \quad \Rightarrow \quad r_1=1\ ,\ r_2=4$$

وباستخدام (3.11) نحصل على $y_c=c_1x+c_2x^4$. وهكذا نجد أن

$$y_1(x)=x, \quad y_2(x)=x^4$$

نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)$$

وبما أن

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix}=3x^4\neq 0$$

إذاً $$y_p = xu(x) + x^4 v(x)$$

وللحصول على الدالتين $u(x)$, $v(x)$ نستخدم العلاقتين في الصيغة رقم (3.22) فنحصل على

$$u(x) = \int \frac{-x^4\left(x^4 + x^2\right)}{3x^4 \cdot x^2} dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + x\right)$$

كما نحصل على

$$v(x) = \int \frac{x\left(x^4 + x^2\right)}{3x^4 \cdot x^2} dx = \frac{1}{3}\left(\ln(x) - \frac{1}{2x^2}\right)$$

إذاً الحل الخاص هو

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{1}{9}\left(x^3 + 3x\right) \cdot x + \frac{1}{3}\left(\ln(x) - \frac{1}{2x^2}\right) \cdot x^4 \\ &= \frac{1}{3} x^4 \ln(x) - \frac{1}{9} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

ويكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة المعطاة هو مجموع الحلين، المكمل للمعادلة المتجانسة والخاص لغير المتجانسة. إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = C_1 x + C_2 x^4 + \frac{1}{3} x^4 \ln(x) - \frac{1}{9} x^4 - \frac{1}{2} x^2$$

✍.

3.5 مسائل

أوجد الحل العام

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 9x^2 + 8x + 5$

(2) $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^2 + x + 1$

(3) $x^2y'' + 5xy' - 12y = \ln(x)$

(4) $x^2y'' - xy' - y = 6x^2$

(5) $x^2y'' + xy' - 12y = \ln(2x)$

(6) $y'' + \frac{1}{x}y' = x$

أوجد الحل العام للمسائل الابتدائية

(7) $x^2y'' + 5xy' + 20y = 0;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$

(8) $x^2y'' + 7xy' + 9y = \cos(x);\ y(1) = 1,\ y'(1) = -4$

(9) $x^2y'' + 3xy' + 2y = 2;\ y(1) = 3,\ y'(1) = 3$

(10) $x^2y'' + 5xy' + 20y = 0;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 2$

(11) $x^2y'' + 7xy' + 9y = 27\ln(x);\ y(1) = 1,\ y'(1) = -4$

****

الباب
4

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا
Higher Order Linear Differential Equations

في هذا الباب نتعرض للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا؛ الرتبة الثالثة، والرتبة الرابعة، ....، وحتى الرتبة النونية. نبحث في الطرق المختلفة للحصول على الحل العام. ونعمم بعض نظريات الرتبة الثانية الخطية للتعامل مع الرتب العليا. لكن ـ بدايةً ـ دعنا نقدم تعريفاً للمعادلات التفاضلية من الرتبة النونية.

تعريف 4.1 **المعادلات التفاضلية من الرتبة النونية**
Differential Equations of Order n

إذا كان $y^{(n)}$ يرمز للمشتقة النونية للدالة $y(x)$ فإن المعادلة التفاضلية من الرتبة النونية يمكن وضعها في الشكل

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (4.1)$$

حيث $y(x)$ هو الحل الذي نبحث عنه.

✍.

المعادلة رقم (4.1) تكون "**معادلة خطية**" من الرتبة النونية إذا أمكن وضعها في الشكل

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + P_{n-2}(x)y^{(n-2)}$$

$$+ \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = F(x); \quad x \in I \tag{4.2}$$

حيث $\{P_i(x)\}_{i=0}^{n-1}$ هي معاملات المعادلة، كما أن $F(x)$ هي دالة الهدف أو الحد غير المتجانس. هذا، وكمثل معادلات الرتبة الثانية نجد أنه إذا كانت المعاملات $\{P_i(x)\}_{i=0}^{n-1}$ دوال ثابتة سميت المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة النونية ذات معاملات ثابتة.

كذلك إذا كانت الدالة $F(x)$ غير صفرية على الأقل لقيمة واحدة لقيم المتغير المستقل x سميت معادلة غير متجانسة، أما إذا كانت الدالة $F(x)$ صفرية لجميع لقيم المتغير المستقل x في الفترة I، سميت معادلة متجانسة.

4.1 الحل العام للمعادلات التفاضلية من الرتب العليا

بالنسبة لطرق حل معادلات الرتب العليا فيجب التنويه على أنها لا تختلف كثيراً عن طرق حل معادلات الرتبة الثانية، بل يمكن اعتبارها امتداداً أو تعميماً للنظريات في حالة الرتبة الثانية. انطلاقاً من هذا المعنى نجد أنه للحصول على الحل العام لأية معادلة خطية غير متجانسة من رتبة أعلى من الرتبة الثانية، علينا - أولاً - إيجاد حل المعادلة المتجانسة المقابلة لها باستخدام المعادلة المميزة، ومعرفة شكل

الجذور لتحديد شكل الحل، ثم نبحث بعد ذلك عن الحل الخاص، ونظراً لأن عدد جذور المعادلة المميزة يساوي رتبة المعادلة التفاضلية يمكن لنا أن نتوقع شكل الحل في حالة المعادلات من الرتب الأعلى من الثانية. حيث يمكن أن يحتوي الحل على كل أشكال الجذور الممكنة، وبالتالي يمكن للحل أن يحتوي على جزء خاص بالجذور الحقيقة المختلفة، وجزء خاص بالجذور التخيلية، وجزء خاص بالجذور المكررة.

أما الحل الخاص فنبحث عنه باستخدام طريقة مقارنة المعاملات، أو طريقة تغيير البارامترات طبقاً لشكل دالة الهدف، ونوعية معاملات المعادلة ثابتة كانت أم متغيرة.

ولمعرفة شكل الحل في حالة المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة نقدم بعض النظريات الهامة. بدايةً لنعتبر المعادلة المتجانسة المقابلة للمعادلة (4.2)

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + P_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0 \quad (4.3)$$

نظرية 4.2 إذا كانت الحلول $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ حلولاً أساسية للمعادلة التفاضلية المتجانسة (4.3)، وكانوا - جميعهم - غير مرتبطين خطياً، وكان $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ ثوابت اختيارية. فإن الحل العام للمعادلة (4.3) والمكمل للمعادلة (4.2) هو

$$\boxed{y_c(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)} \tag{4.4}$$

✍.

نظرية 4.3 إذا كانت الحلول $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ حلولاً للمعادلة (4.3) على الفترة I، فإن الحلول $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ يكونون – جميعهم – غير مرتبطين خطياً على الفترة I، إذا كان وفقط إذا كان لأي x_0 ينتمي للفترة I فإن

$$W(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.5}$$

✍.

نظرية 4.4 إذا كان الحل $y_c(x)$ المعطى في (4.4) هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة (4.3)وكان $y_p(x)$ هو أي حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (4.2)، فإن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (4.2) هو

$$y_g(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{4.6}$$

✍.

ولمعرفة كيفية الحصول على حلول معادلات الرتب العليا ينبغي الإلمام الجيد بنظرية المعادلات، وذلك حتى نتمكن من حل المعادلات المميزة، والتي تكون من درجات أكبر من الثانية. على أية حال الأمثلة التالية توضح الكثير من النقاط المفيدة في حل معادلات الرتب العليا.

مثال 4.1 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} - 16y'' + 12y' = 0$$

الحل المعادلة المميزة هي

$$r^4 + 3r^3 - 16r^2 + 12r = 0$$

أو

$$r\left(r^3 + 3r^2 - 16r + 12\right) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$r(r-1)(r-2)(r+6) = 0$$

إذاً الجذور الأربعة هي

$$r_1 = 0,\ r_2 = 1,\ r_3 = 2,\ r_4 = -6$$

وبالتالي فإن الحل العام هو

$$y_g(x) = c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-6x}$$

✍.

مثال 4.2 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0$$

الحل المعادلة المميزة هي

$$r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$$

أو

$$(r-1)^4 = 0$$

إذاً الجذور الأربعة هي

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$$

الحل العام إذاً هو

$$y_g = e^{x}\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3\right)$$

✍.

مثال 4.3 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^{(5)} + 2y^{(4)} - 3y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 0$$

الحل المعادلة المميزة هي

$$r^5 + 2r^4 - 3r^3 - 4r^2 + 4r = 0$$

أو

$$r\left(r^4+2r^3-3r^2-4r+4\right)=0$$

إذاً الجذور الخمسة هي

$$r_1=0,\ r_2=r_3=1,\ r_4=r_5=-2$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g=c_1+e^x\left(c_2+c_3x\right)+e^{-2x}\left(c_4+c_5x\right)$$

✍.

مثال 4.4 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^{(3)}+2y''-y'=4e^x-3\cos(2x)$$

الحل هذه معالة غير متجانسة. المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة المقابلة لها هي

$$r^3+2r^2-r=0$$

أو

$$r\left(r^2+2r-1\right)=0$$

إذاً الجذور الثلاثة هي

$$r=0,\ r_2=-1+\sqrt{2},\ r_3=-1-\sqrt{2}$$

إذاً الحل العام للمعادلة المتجانسة أو الحل المكمل للمعادلة غير المتجانسة هو

$$y_c = c_1 + c_2 e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(-1-\sqrt{2})x}$$

يمكن الحصول على الحل الخاص باستخدام طريقة مقارنة المعاملات، نفرض الحل الخاص في الشكل

$$y_p(x) = Ae^x + B\cos(2x) + C\sin(2x)$$

بالتفاضل نحصل على

$$y_p'(x) = Ae^x - 2B\sin(2x) + 2C\cos(2x);$$

$$y_p''(x) = Ae^x - 4B\cos(2x) - 4C\sin(2x);$$

$$y_p^{(3)}(x) = Ae^x + 8B\sin(2x) - 8C\cos(2x);$$

بالتعويض عن $y_p^{(3)}$, y_p'' , y_p' في المعادلة الأصلية نجد أن $A = 2,\ B = \frac{6}{41},\ C = \frac{15}{82}$ إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = 2e^x + \frac{6}{41}\cos(2x) + \frac{15}{82}\sin(2x)$$

وبالتالي فالحل العام هو

$$y_g(x) = c_1 + c_2 e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(-1-\sqrt{2})x}$$

$$+2e^x + \frac{6}{41}\cos(2x) + \frac{15}{82}\sin(2x)$$

✍.

مثال 4.5 أوجد الحل العام للمعادلة

$$y^{(3)} - 4y'' + y' + 6y = \cos^2(x)$$

الحل هـذه معالـة غـير متجانسـة. المعادلـة الممـيزة للمعادلـة المتجانسة المقابلة للمعادلة المعطاة هي

$$r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$$

أو

$$(r-2)(r+1)(r-3) = 0$$

إذاً الجذور الثلاثة هي

$$r_1 = 2,\ r_2 = -1,\ r_3 = 3$$

إذاً الحل المكمل هو

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$$

ويمكن التأكد بأن الحلول الثلاثة

$$y_1(x) = e^{2x},\ y_2(x) = e^{-x},\ y_3(x) = e^{3x}$$

هي حلول أساسية. الآن باستخدام طريقة تغيير البـارامترات، نفرض الحل الخاص في الشكل

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) + z(x)y_3(x)$$

بالتفاضل يمكن الحصول على $y_p', y_p'', y_p^{(3)}$، وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على نظام مكون من ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل u', v', z' في الشكل

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) + z'(x)y_3(x) = 0$$

$$u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) + z'(x)y_3'(x) = 0$$

$$u'(x)y_1''(x) + v'(x)y_2''(x) + z'(x)y_3''(x) = \cos^2(x)$$

حل هذا النظام يعطي

$$u'(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos^2(x)$$

$$v'(x) = \frac{1}{12}e^{x}\cos^2(x)$$

$$z'(x) = \frac{1}{4}e^{-3x}\cos^2(x)$$

وبالتكامل نحصل على

$$u(x) = \frac{e^{-2x}}{24}\left(1 - 2\sin(x)\cos(x) + 2\cos^2(x)\right)$$

$$v(x) = \frac{e^{x}}{60}\left(2 + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)\right)$$

$$z(x) = \frac{e^{-3x}}{52}\left(2\sin(x)\cos(x) - 3\cos^2(x) - \frac{2}{3}\right)$$

وبالتعويض عن الكميات $u(x), v(x), z(x)$ في الحل الخـاص y_p نحصل عليه في شكله النهـائي، ومـن ثـم نحصـل علـى الحل العام.

✍.

مثال 4.6 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^3y^{(3)}+9x^2y''+19xy'+8y=0$$

الحل هذه معادلة أويلر المتجانسة، بوضع $y=x^r$، يمكن الحصـول على المعادلة المميزة

$$r^3+6r^2+12r+8=0 \quad \Rightarrow \quad (r+2)^3=0$$

إذاً الجذور هي $\quad r_1=r_2=r_3-2$

إذاً الحل العام هو

$$y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln(x)+c_3x^{-2}\left[\ln(x)\right]^2$$

✍.

مثال 4.7 أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^3y^{(3)}+2x^2y''-xy'+y=8x; \quad x>0$$

الحل هذه المعادلة هي معادلة أويلر غير المتجانسة، بوضع $y = x^r$، يمكن الحصول على المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة المقابلة في الشكل

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$$

إذاً الجذور هي

$$r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = -1$$

إذاً الحل المكمل للمعادلة المعطاة هو

$$y_c = c_1 x + c_2 x \ln(x) + c_3 x^{-1}$$

ويمكن التأكد من أن

$$y_1 = x, \quad y_2 = x \ln(x), \quad y_3 = x^{-1}$$

هي حلول أساسية. بضرب المعادلةالمعطاة في $\frac{1}{x^3}$، نحصل على

$$y''' + \frac{2}{x} y'' - \frac{1}{x^2} y' + \frac{1}{x^3} y = \frac{8}{x^2}$$

باستخدام طريقة تغيير البارامترات للحصول على الحل الخاص نفرض الحل الخاص في الشكل

$$y_p = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x) + z(x) y_3(x)$$

أو

$$y_p = u(x)x + v(x)x\ln(x) + z(x)\frac{1}{x}$$

وبإجراء عملية التفاضل للحصول على y_p'، y_p''، $y_p^{(3)}$، والتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على ثلاث معادلات في الثلاثة مجاهيل u', v', z'، ثم بإجراء التكامل نحصل على

$$u(x) = -2\ln^2(x) - 2\ln(x);\ v(x) = 4\ln(x);\ z(x) = x^2$$

وبالتالي نجد أن

$$y_p(x) = 2x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + x$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = (c_2+1)x + (c_3-2)x\ln(x) + c_1x^{-1} + 2x\ln^2(x)$$

.✍

4.2 مسائل

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

(1) $\sin^2 x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \tan x\dfrac{dy}{dx} - k^2\left(\cos^2 x\right)y = 0$

(2) $(x-1)^2y'' - 4(x-1)y' + 14y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

(3) $(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' - 14y = x^3 - 3x^2 + 3x - 6$

(4) $y^{(4)} - 16y = 0;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$

(5) $y^{(4)} - 16y = 0,\ \ y(0) = -2,$
$y'(0) = y''(0) = 0,\ y^{(3)}(0) = 3$

(6) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = \cos^2(x)$

(7) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = \sin^2(x)$

(8) $y^{(3)} - 13y' + 12y = \cosh(2x) + x$

(9) $y^{(3)} - 13y' + 12y = \cosh(2x)$

(10) $y^{(3)} - 4y'' + 20y' = e^x\left(x^2 + 4x - 10\right)$

(11) $y^{(3)} - 4y'' + 20y' = x^2 + 4x - 10$

(12) $x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' + 20x^2 y'' + 14xy' + 36y = 8x^{-3}$

(13) $x^4 y^{(4)} + 6x^3 y''' + 20x^2 y'' + 14xy' + 36y = 8x^{-2}$

(14) $x^4 y^{(4)} + 7x^3 y''' + 8x^2 y'' = 4x^{-2}$

(15) $x^4 y^{(4)} + 7x^3 y''' + 8x^2 y'' = 4x^{-3}$

(16) $x^3 y''' + 5x^2 y'' + xy' - 4y = 6x\cos(x)$

(17) $x^3 y''' - 2xy' + 4y = 12\ln(x) - 4,$
$y(1) = y'(1) = 2,\ y''(1) = 9$

****

الباب 5

نظم المعادلات التفاضلية الخطية
Systems of Linear Differential Equations

في هذا الباب نتعامل مع نظم المعادلات التفاضلية الخطية. حيث نقدم طريقتين للحل. الطريقة الأولى تعتمد على استخدام المؤثرات التفاضلية *(Differential Operators)* باعتبار أنه في نظم المعادلات التفاضلية تكون المجاهيل (الحلول) واقعة تحت تأثير المؤثرات التفاضلية، الأمر الذي يستدعي فك الارتباط بين المؤثرات التفاضلية والحلول وهذه الطريقة تسمى - أيضاً - طريقة هيفيسايد. في فصل (5.2) نقدم الطريقة الثانية، والتي تعتمد على استخدام ما يسمى بالقيم المميزة، *(Eigenvalues)* والمتجهات المميزة *(Eigenvectors)* المقابلة لها وذلك بالتنسيق مع مفاهيم قابلية المصفوفات لكي تكون مصفوفات قطرية *(Diagonalizable)*.

5.1 الطريقة الأولى لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام المؤثرات التفاضلية

تعتمد هذه الطريقة على استبدال المؤثر التفاضلي $D = \frac{d}{dx}$ والذي يؤثر على الحل المطلوب الحصول عليه بدرجات مختلفة بالمشتقة من نفس الرتبة فيتحول بذلك نظام المعادلات التفاضلية إلى نظام من المعادلات الجبرية يتم حله

بأية طريقة مع التخلص من تأثير المؤثر التفاضلي على الحل عن طريق فصل المتغيرات وإجراء التكامل. يمكن على سبيل المثال استبدال الكمية D^3y بالكمية $y^{(3)}$، كما يمكن — أيضاً ـ استبدال الكمية Dy بالكمية y'. وهكذا يمكن أن نعبر عن المشتقات التي تظهر في المعادلة التفاضلية من خلال المؤثرات التفاضلية بدرجات تقابل رتبة المشتقة. إليك الآن بعض الأمثلة التي توضح كيفية تطبيق هذه الطريقة.

مثال 5.1 أوجد حل النظام

$$x' + y' = e^t; \quad x = x(t)$$

$$x' + x + y = 1; \quad y = y(t)$$

الحل هذا نظام من معادلتين تفاضليتين خطيتين من الرتبة الأولى في مجهولين، هما $x = x(t)$، $y = y(t)$. باستخدام المؤثرات التفاضلية يتحول النظام المعطى إلى الشكل

$$\begin{aligned} Dx + Dy &= e^t \\ (D+1)x + y &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

للحصول على المجهول الأول $x = x(t)$ يتم ضرب المعادلة الثانية في $(-D)$، فيتحول النظام إلى

$$Dx + Dy = e^t$$

$$-D(D+1)x - Dy = D(1) = 0$$

بالجمع نجد أن

$$-D(D+1)x + Dx = e^t$$

أو

$$D^2x = -e^t$$

وبالتالي فإن

$$x'' = -e^t \qquad \text{(ii)}$$

بالتأكيد يمكن اعتبار المعادلة (ii) معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية يمكن حلها بالطرق السابقة. لكن على أية حال بفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$x' = -e^t + c_1$$

وبالتكامل مرة اخرى، نحصل على

$$x = -e^t + c_1t + c_2 \qquad \text{(iii)}$$

للحصول على المجهول الثاني $y = y(t)$ يتم ضرب المعادلة الأولى من النظام (i) في $(D+1)$، وضرب المعادلة الثانية في $(-D)$ فيتحول النظام (i) إلى النظام

$$D(D+1)x + D(D+1)y = (D+1)e^t$$

$$(-D)(D+1)x - Dy = 0$$

بالجمع نجد أن

$$D(D+1)y - Dy = (D+1)e^t = De^t + e^t$$

وبعد الاختصار

$$D^2 y = 2e^t$$

وهذه الأخيرة يمكن أن تأخذ شكل معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية، أي يمكن أن تأخذ الشكل

$$y'' = 2e^t \qquad \text{(iv)}$$

بالتكامل مرة واحدة نحصل على

$$y' = 2e^t + k_1$$

وبالتكامل مرة أخرى نحصل على

$$y = 2e^t + k_1 t + k_2 \qquad \text{(v)}$$

للحصول على الثوابت k_1، k_2، c_1، c_2، نعوض من (iii)، (v) عن x، y في النظام (i) فنحصل على النظام

$$D\left(-e^t + c_1 t + c_2\right) + D\left(2e^t + k_1 t + k_2\right) = e^t$$

$$(D+1)\left(-e^t + c_1 t + c_2\right) + \left(2e^t + k_1 t + k_2\right) = 1$$

أو النظام

$$-e^t + c_1 + 2e^t + k_1 = e^t$$

$$-e^t + c_1 - e^t + c_1 t + c_2 + 2e^t + k_1 t + k_2 = 1$$

وهكذا نحصل من المعادلة الأولى من هذا النظام على العلاقة بين الثابتين c_1، k_1 في الشكل

$$c_1 + k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -c_1$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن

$$k_2 = 1 - c_1 - c_2$$

وهكذا نجد أن حل النظام المعطى هو

$$x = -e^t + c_1 t + c_2, \quad y = 2e^t - c_1(t+1) - c_2 + 1$$

✍.

مثال 5.2 أوجد حل النظام

$$x'' - 2y = t + 2$$

$$x' - 3y' + 2y = 3t^2$$

الحل هذا نظام من معادلتين تفاضليتين خطيتين الأولى من الرتبة الثانية، والثانية من الرتبة الأولى في مجهولين $x = x(t)$، $y = y(t)$. باستخدام المؤثرات التفاضلية يتحول النظام المعطى إلى الشكل

$$D^2 x - 2y = t + 2 \qquad \text{(i)}$$

$$Dx+(-3D+2)y=3t^2 \qquad \text{(ii)}$$

للحصول على $y=y(t)$، نتخلص من x، وذلك بضرب المعادلة (ii) في$(-D)$، والجمع مع المعادلة (i) فنحصل على

$$-2y+\left(3D^2-2D\right)y=2-5t$$

أو

$$\left(3D^2-2D-2\right)y=2-5t$$

وهذه معادلة من الرتبة الثانية، الحل العام لها يمكن الحصول عليه باستخدام أيٍ من الطرق السابقة. إذاً

$$y=c_1e^{\frac{1+\sqrt{7}}{3}t}+c_2e^{\frac{1-\sqrt{7}}{3}t}+\frac{5}{2}t-\frac{7}{2}$$

للحصول على $x=x(t)$، نتخلص من y، وذلك بضرب المعادلة (ii) في العدد 2، وضرب المعادلة (i) في $(-3D+2)$، ثم الجمع فنجد أن

$$\left(-3D^3+2D^2+2D\right)x=6t^2+2t+1$$

وهذه ـ أيضاً ـ معادلة من الرتبة الثانية، الحل العام لها يمكن الحصول عليه في الشكل

$$x = k_1 e^{\frac{1+\sqrt{7}}{3}t} + k_2 e^{\frac{1-\sqrt{7}}{3}t} + t^3 - \frac{5}{2}t^2 + \frac{29}{2}t + k_3$$

وبالتعويض في النظام المعطى عن كل من الحلين x، y يمكن الحصول على العلاقة بين الثوابت k_1، k_2، c_1، c_2.

✍.

5.2 الطريقة الثانية لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية

هذه الطريقة تعتمد على استخدام بعض المفاهيم مثل مفهوم القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة، ومفهوم قابلية المصفوفة لأن تكون قطرية، لذا دعنا نبدأ بتقديم بعض التعريفات والنظريات عن هذه المفاهيم.

تعريف 5.1 تعَرف **"القيمة المميزة"** للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ على أنها تلك القيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة

$$AX = \lambda X \tag{5.1}$$

حيث X هي مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ والمقابلة للقيمة المميزة λ. تسمى المصفوفة X **"المتجه المميز"** *(Eigenvector)* للمصفوفة A والمقابل للقيمة المميزة λ.

✍.

تنويه يجب التنويه إلى أن كلمة *(Eigen)* كلمة ألمانية وتعني بالإنجليزية *(Proper)*.

نظرية 5.2 إذا كانت A هي المصفوفة

$$A = \left[a_{ij} \right] \; ; \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n} \tag{5.2}$$

فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا كان وفقط إذا كان $|\lambda I_n - A| = 0$. والعكس فإذا كانت λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A فإن أي حل غير صفري *(Nontrivial Solution)*، X، للنظام $(\lambda I_n - A)X = 0$ هو متجه مميز مقابل للقيمة المميزة λ.

✍.

هذا، وللحصول على القيم المميزة، $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$، للمصفوفة (5.1) يتم فك المحدد

$$|\lambda I_n - A| = 0 \tag{5.3}$$

فنحصل على معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في القيمة المميزة λ. بحل هذه المعادلة نحصل على عدد n من القيم

المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$. وبما أنه في مقابل كل قيمة مميزة، λ_i، يوجد متجه مميز، X_i، بحيث أن

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad \forall\ i = \overline{1,n} \tag{5.4}$$

إذاً فللحصول على المتجه المميز X_i المقابل للقيمة المميزة λ_i، علينا بحل نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس

$$(\lambda_i I_n - A)X_i = 0 \quad \forall\ i = \overline{1,n} \tag{5.5}$$

بما أن المصفوفة $(\lambda_i I_n - A)$ مصفوفة شاذة ***(Singular)*** حسب التعريف فمن المعروف إذاً أن حل هذا النظام ليس متجهاً مميزاً واحداً، X_i، بل هو فراغ من المتجهات المميزة، الأمر الذي يعني إنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد عدد لانهائي من المتجهات المميزة X_i.

مثال 5.3 أوجد القيم المميزة، وكذلك المتجهات المميزة المقابلة لكل قيمة مميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة A مربعة من الرتبة الثانية، أي أن $n = 2$ إذاً توجد قيمتان مميزتان. المعادلة المميزة للمصفوفة A هي

$$|\lambda I_2 - A| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$$

أو

$$(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

إذاً القيم المميزة هي

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

للحصول على المتجهات المميزة في مقابل القيمة المميزة

$\lambda_1 = -1$ نوجد حل النظام

$$(\lambda_1 I_n - A)X_1 = 0$$

أو النظام

$$\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذي يمكن أن ُيستبدل بالنظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث تم استبدال المصفوفة المختزلة *(Reduced Matrix)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ حسب طريقة جاوس - جوران.

والتي تقول - أيضاً - أن المتغير x_2 هو متغير تابع بينما المتغير x_1 هو متغير مستقل. ولنفرض أن $x_1 = \alpha \neq 0$، حيث α تأخذ قيماً اختيارية ما عدا الصفر. بما أن

$$0x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

إذاً فإن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فراغ لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً اختيارية ماعدا الصفر.

للحصول علىالمتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 3$ نوجد حل النظام

$$(\lambda_2 I_n - A)X_2 = 0$$

أو

$$\left(3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو النظام

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



تعريف 5.3 يقال لأية مصفوفة مربعة، $D = (d_{ij})$، من الرتبة $n \times n$ أنها مصفوفة قطرية إذا كانت كل عناصرها *(Entries)* أصفارا ماعدا عناصر القطر الرئيسي *(Main Diagonal)*، حيث يوجد - على الأقل - عنصر واحد غير صفري ضمن عناصر القطر الرئيسي.

✍.

بلغة الرياضيات فإن هذا يعني أن المصفوفة $D = [d_{ij}]$ تكون مصفوفة قطرية إذا كان $d_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$. إذاً فإذا كانت $D = [d_{ij}]$ هي مصفوفة قطرية فإنها يجب أن تأخذ الشكل

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

انتبه! القيم المميزة لأية مصفوفة قطرية هي عبارة عن عناصر القطر الرئيسي. على سبيل المثال فإن القيم المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

هي

$$\lambda_1 = 1, \ \ \lambda_2 = 2, \ \ \lambda_3 = 10$$

والسؤال المطروح الآن هو هل يمكن لأية مصفوفة أن تتحول إلى مصفوفة قطرية؟ هل توجد شروط لذلك؟ وكيف يتم تحويل المصفوفة إلى الشكل القطري؟ الإجابة عن هذه الأسئلة تقدمها النظريات الآتية.

نظرية 5.4

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. لنفرض أن الفئة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ هي فئة القيم المميزة لهذه المصفوفة. لنفرض أن المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة هي الفئة $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^{n}$ وهى ـ جميعها ـ من الرتبة $n \times 1$.
ولنفرض ـ أيضاً ـ أن P هي المصفوفة التي تتكون من عدد n من الأعمدة، كل عمود فيها هو أحد المتجهات المميزة.
إذا كانت وفقط إذا كانت هذه المتجهات المميزة، $\{X_i\}_{i=1}^{n}$، غير مرتبطة خطياً فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون قطرية، بحيث يكون

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

.✍

نظرية 5.5 لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. إذا كانت القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ لهذه المصفوفة كلها مختلفة وغير مكررة، فإن المتجهات المميزة $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ من الرتبة $n \times 1$ والمقابلة لهذه القيم المميزة جميعها تكون غير مرتبطة خطياً وتكون المصفوفة A قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

.✍

سنحاول الآن استخدام المفاهيم السابقة في حل نظم المعادلات التفاضلية العادية في حالة قابلية مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات التفاضلية لأن تكون مصفوفة قطرية. المثال الآتي يوضح هذه الفكرة.

مثال 5.3 أوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1' = y_1 - y_2 + 2y_3$$
$$y_2' = 3y_1 + 4y_3$$
$$y_3' = 2y_1 + y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل $Y' = AY$، حيث

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود Y (الحل المطلوب). المعادلة المميزة للمصفوفة A، هي

$$|\lambda I_3 - A| = 0$$

أو

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda & -4 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

بفك هذا المحدد نحصل على

$$(\lambda - 1)\left[\lambda^2 - 4\right] - [-3\lambda - 8] - 2[3 + 2\lambda] = 0$$

حل هذه المعادلة الأخيرة يعطي القيم المميزة للمصفوفة A. وبالتالي نجد أن

$$\lambda_1 = 2 \; ; \quad \lambda_2 = \frac{\left(-1 - \sqrt{13}\right)}{2} \; ; \quad \lambda_3 = \frac{\left(-1 + \sqrt{13}\right)}{2}$$

أما المتجهات المميزة المقابلة فهي

بضرب طرفي هذا النظام من اليسار في المصفوفة العكسية P^{-1} نحصل على

$$Z' = P^{-1}AP\,Z$$

لاحظ أن

$$P^{-1}P\,Z' = I\,Z' = Z'$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة *(Unit Matrix)* من نفس الرتبة كما أن $P^{-1}P = I$. بما أن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix}$$

إذاً فإن

$$Z' = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1 \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2} z_2 \\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2} z_3 \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن

$$z_1' = 2z_1,\ z_2' = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} z_2,\ z_3' = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} z_3$$

وهذه معادلات تفاضلية انفصالية من الرتبة الأولى يمكن حلها بفصل المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$z_1 = ae^{2t},\ z_2 = be^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t},\ z_3 = ce^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t}$$

حيث a، b، c ثوابت اختيارية. يمكن ـ أيضاً ـ الحصول على المصفوفة Z في الشكل المصفوفي

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t} \\ ce^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t} \end{bmatrix}$$

وبما أن $Y = PZ$، إذاً

$$Y = PZ = \begin{bmatrix} 0 & -5-\sqrt{13} & -5+\sqrt{13} \\ 2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 1 & 7+\sqrt{13} & 7-\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t} \\ ce^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t} \end{bmatrix}$$

الآن، بوضع

$$\beta_1 = e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t},\ \beta_2 = e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t}$$

نجد أن الحل العام للنظام المعطى هو

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(-5-\sqrt{13}\right)(b\beta_1)+\left(-5+\sqrt{13}\right)(c\beta_2) \\ 2\left(ae^{2t}\right)+\left(-2\sqrt{13}\right)(\beta\lambda_1)+\left(2\sqrt{13}\right)(c\beta_2) \\ \left(ae^{2t}\right)+\left(7+\sqrt{13}\right)(b\beta_1)+\left(7-\sqrt{13}\right)(c\beta_2) \end{pmatrix}$$

.✍

5.3 مسائل

بيِّن ما اذا كانت المصفوفات الآتية قابلة لأن تكون مصفوفات قطرية، فإذا كانت كذلك فأوجد المصفوفة غير الشاذة P التي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $C=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $D=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(5) $E=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (6) $G=\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد حلول نظم المعادلات التفاضلية الآتية

(7) $y_1' = 3y_1 + 2y_2$
$y_2' = y_1 + 4y_2$

(8) $x' + y' - x = \sin(t)$
$x' - 3y = 2$

(9) $y_1' = y_2 + y_3$
$y_2' = 2y_1 - 3y_3$
$y_3' = y_1 + y_2$

(10) $y_1' = 5y_1 - y_2$
$y_2' = -2y_2$
$y_3' = 8y_1 + 7y_2$

(11) $y_1' = -4y_1 + 3y_2$
$y_2' = 2y_1 - 3y_2$

(12) $y_1' = 5y_1 - 4y_2 + 4y_3$
$y_2' = 12y_1 - 11y_2 + 12y_3$
$y_3' = 4y_1 - 4y_2 + 5y_3$

(13) $2x' + y' - x + 4y = 6e^{2t}$
$x' - y' = 0$

(14) $x' + y' - x = \ln t$
$x' - 3y = 2$

****

الباب
6

تحويلات لابلاس
Laplace Transforms

عند حل الكثير من المسائل الهندسية التطبيقية أحياناً ما تظهر بعض أنواع من المعادلات التفاضلية التي تختلف عن تلك الأنواع التي تمت دراستها في الأبواب السابقة. فمثلا تظهر بعض المعادلات التفاضلية التي يكون فيها الحد غير المتجانس، $G(x)$، على شكل نبضات *(Impulses)*، أو في شكل دوال متصلة على فترات *(Pieswise Continuous)*، الأمر الذي لايمكن معه استخدام الطرق السابقة لحل هذه الأنواع من المعادلات. وبالتالي علينا أن نبحث عن طرق وأساليب رياضية أخرى للتعامل مع مثل هذه المعادلات. إحدى هذه الطرق الرياضية تستخدم ما يعرف "**بتحويل لابلاس**" نسبة إلى عالم الرياضيات والفيزياء الفرنسي بيير سيمون لابلاس *(Laplace, P. C., 1749 - 1827)*. والتحويل *(Transform)* بصفة عامة هو أداة *(Devise)* لتحويل الدوال والمعادلات من شكلها الأصلي إلى شكل آخر أبسط منه أو على الأقل إلى شكل آخر يكون معروفاً لدينا.

هذا والتحويلات عادة ما تكون تحويلات تكاملية، مثل تحويلات لابلاس، وتحويلات فوريير *(Fourier Transform)*، وتحويلات لاجير *(Laguerre Transform)*، وغيرها الكثير.

فتحويل لابلاس هو تحويل تكاملي عند تأثيره على الدالة يحولها إلى دالة أخرى مختلفة تماماً عن الدالة الأصلية، حيث يتم تحويل المتغير المستقل للدالة الأصلية إلى متغير آخر، وبالتالى يتغير نطاق ومدى الدالة الأصلية.
وهكذا يمكن لنا تحويل الدالة التي نتعامل معها من شكلها المعقد إلى شكل آخر، ربما يكون أبسط وأسهل في التعامل معه من الدالة الأصلية. فمثلاً الدالة $f(t)=\cos(at)$، حيث النطاق هو R بتأثير تحويل لابلاس عليها تتحول إلى الدالة الكسرية $F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}$.
بيد أن الفائدة العظمى لتحويل لابلاس تكمن في قدرته على حل المعادلات التفاضلية، حيث يمكن بتأثير تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية أن تتحول إلى معادلة جبرية يكون فيها المجهول هو تحويل لابلاس، وبحل هذه المعادلة الجبرية يمكن أن نحصل على تحويل لابلاس صراحة. ثم بإيجاد تحويل لابلاس العكسي نحصل على حل المعادلة التفاضلية الأصلية. ولنبدأ بالتعريف الأساسي.

تعريف 6.1 يعرف **تحويل لابلاس** للدالة $f(t)$، ويرمز له بالرمز $\mathscr{L}(f(t))$ على أنه

$$\mathscr{L}\left(f(t)\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt=F(s)\ ;\quad s>0 \tag{6.1}$$

✍.

ومن هذا التعريف نجد أن تحويل لابلاس ما هو إلا مؤثر تكاملي، إذا أثر على الدالة $f(t)$ فإنه يحولها إلى دالة أخرى، $F(s)$. في الواقع فإنه من المهم معرفة أن تحويل لابلاس هو مؤثر تكاملي متصل *(Continuous Integral Operator)*، بالتالي فهو ـ أيضاً ـ مؤثر تقاربي *(Convergent Operator)*، أي له قيمة محدّدة ومحدودة *(Finite)*. حيث أن

$$\int_{0}^{\infty}\left|e^{-st}\right|^{2}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-2st}dt=\lim_{\alpha\to\infty}\int_{0}^{\alpha}e^{-2st}dt$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{-1}{2s}\int_{0}^{\alpha}e^{-2st}\cdot(-2s)dt=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{2s}e^{-2st}\right]_{0}^{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{2s}e^{-2s\alpha}+\frac{1}{2s}\right]=0+\frac{1}{2s}=\frac{1}{2s}$$

وأيضاً فإن

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left|e^{-st}\right|^{2}dtds=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-2st}dtds=\int_{0}^{\infty}\left[\lim_{\alpha\to\infty}\int_{0}^{\alpha}e^{-2st}dt\right]ds$$

$$=\lim_{\gamma\to0^{+}}\int_{\gamma}^{c}\frac{1}{2s}ds+\lim_{\beta\to\infty}\int_{c}^{\beta}\frac{1}{2s}ds$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \lim_{\gamma\to 0^+}\left[\ln(s)\right]_{\gamma}^{c} + \lim_{\beta\to\infty}\left[\ln(s)\right]_{c}^{\beta} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \lim_{\gamma\to 0^+}\left[\ln(c)-\ln(\gamma)\right] + \lim_{\beta\to\infty}\left[\ln(\beta)-\ln(c)\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \lim_{\gamma\to 0^+}\ln\left(\frac{c}{\gamma}\right) + \lim_{\beta\to\infty}\ln\left(\frac{\beta}{c}\right) \right\}$$

تعريف 6.2 يعرف "**تحويل لابلاس العكسي**" للدالة $F(s)$، ويرمز له بالرمز $\mathscr{L}^{-1}$ على أنه مؤثر عكسي للمؤثر التكاملي $\mathscr{L}$. فإذا أثر المؤثر $\mathscr{L}$ على الدالة $f(t)$ فحولها إلى الدالة $F(s)$، فإن المؤثر العكسي $\mathscr{L}^{-1}$ يؤثر على الدالة $F(s)$ فيعود بها إلى شكلها الأصلي $f(t)$.

بلغة الرياضيات يمكننا التعبير عن هذا المفهوم بالعلاقة الرياضية الآتية

$$\mathscr{L}(f(t)) = F(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \tag{6.2}$$

✍.

نظرية 6.3 في حالة وجود كل من تحويلات لابلاس $\mathscr{L}(f(t)), \mathscr{L}(g(t))$ للدالتين $f(t), g(t)$ وتحويلات لابلاس العكسية $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$، $\mathscr{L}^{-1}(G(s))$ فإن العلاقات الرياضية الآتية صحيحة

(1) $\mathcal{L}(f(t)+g(t))=\mathcal{L}(f(t))+\mathcal{L}(g(t))=F(s)+G(s)$

(2) $\mathcal{L}(\alpha f(t))=\alpha\mathcal{L}(f(t))=\alpha F(s)$

(3) $\mathcal{L}^{-1}(F(s)+G(s))=\mathcal{L}^{-1}(F(s))+\mathcal{L}^{-1}(G(s))$
$=f(t)+g(t)$

(4) $\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s))=\alpha\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\alpha f(t)$
.✍

الآن – وقبل أن نبدأ في تقديم طرق إيجاد تحويلات لابلاس – دعنا نجيب عن السؤال التقليدي، هل يمكن إيجاد تحويل لابلاس لأية دالة أم أن هنالك بعض الشروط الواجب توافرها في الدالة لكي يوجد لها تحويل لابلاس؟

إن الإجابة عن هذا السؤال يمكن أن نستنتجها بسهولة لو علمنا أن تحويل لابلاس هو مؤثر تكاملي متصل ومتقارب، إذاً فلكي يوجد التكامل في الطرف الأيمن من التعبير الرياضي (6.1) يجب أن تكون الدالة $f(t)$ دالة محدودة *(Bounded Function)*، وذلك حتى يوجَد للتكامل قيمة محددة أو بمعنى آخر لكي يكون التكامل تقاربي (لا يساوي المالانهاية). هذه المعاني الرياضية يمكن التعبير عنها في النظرية التالية.

نظرية 6.4 **الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس**

إذا كانت الدالة $f(t)$ متصلة على فترات، أو متقطعة الاتصال على كل فترة محدودة

$$[0, b]; \; b > 0$$

وكان

$$|f(t)| \leq Ce^{\beta t} \quad \forall \, t \geq t_0$$

حيث أن C، β، t_0 ثوابت فإنه يوجد للدالة $f(t)$ تحويل لابلاس $\mathscr{L}(f(t))$ وذلك لكل $s > b$.

✍.

ملاحظة هامة

النظرية السابقة تُعطي الشرط الكافي فقط للدالة لكي يوجد لها تحويل لابلاس ولا تعطي الشرط الضروري. أي أنه يمكن لدالة ما أن لا تحقق شروط النظرية السابقة، ومع ذلك يمكن أن يوجد لها تحويل لابلاس.

فمثلاً الدالة $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$، ليست متصلة على فترات على أية فترة محدودة $[0, b]$ لكل $b > 0$، وذلك لأن هذه الدالة تعطي قيمة لانهائية عند $t = 0$. لكن في المقابل فإن تكامل هذه الدالة له وجود (يعطي قيمة محدودة) على أية فترة محدودة $[0, b]$ لكل $b > 0$، إذ أن

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^b t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\sqrt{t}\Big|_\alpha^b = \lim_{\alpha\to 0}\left[2\sqrt{b}-2\sqrt{\alpha}\right] = 2\sqrt{b}$$

إذاً تحويل لابلاس لهذه الدالة هو

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-st}dt = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-st}dt$$

لحساب هذا التكامل نستخدم التعويض

$$s\,t = y \;\Rightarrow\; t = \frac{y}{s},\;\; dt = \frac{dy}{s}$$

إذاً

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = s^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}dy = \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

وبما أن دالة جاما *(Gamma Function)* تعرف على أنها التكامل المعتل أو الشاذ *(Improper Integral)*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy;\;\; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{6.3}$$

إذاً فإن

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\;;\; s>0 \tag{6.4}$$

6.1 تحويلات لابلاس وتحويلات لابلاس العكسية لبعض الدوال المعروفة

نحاول في هذا الفصل الحصول على شكل تحويل لابلاس لبعض الدوال المعروفة مثل دوال كثيرات الحدود، الدوال الأسية، والدوال المثلثية وغيرها.

(1)

تحويل لابلاس للدالة الخطية $f(t)=t$ هو $\mathscr{L}(t)=\frac{1}{s^2}$
وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s^2}$ هو t $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t$ حيث $s>0$.

لدينا

$$\mathscr{L}(t)=\int_0^\infty te^{-st}dt=\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha te^{-st}dt$$

باستخدام قاعدة التكامل بالتجزيء نضع

$$u=t \quad , \quad dv=e^{-st}dt$$
$$du=dt \ , \quad v=\frac{-1}{s}e^{-st}$$

فنجد أن

$$\int_0^\alpha te^{-st}dt=\frac{-t}{s}e^{-st}\Big|_0^\alpha+\frac{1}{s}\int_0^\alpha e^{-st}dt=\frac{-t}{s}e^{-st}\Big|_0^\alpha$$

$$+\frac{-1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\alpha}=\left(\frac{-\alpha}{s}e^{-s\alpha}+0\right)+\left(\frac{-1}{s^2}e^{-s\alpha}+\frac{1}{s^2}\right)$$

وبالتالي فإن

$$\mathscr{L}(t)=\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-\alpha}{s}e^{-s\alpha}+0\right]+\left[\frac{-1}{s^2}e^{-s\alpha}+\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{s^2}$$

إذاً فإن

$$\mathscr{L}(t)=\frac{1}{s^2}\ ;\ s>0 \tag{6.5}$$

وبالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s^2}$ هو

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t\ ;\ s>0 \tag{6.6}$$

(2)

تحويل لابلاس للدالة $f(t)=t^n$ حيث n أي عدد صحيح موجب هو $\mathscr{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}$، وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{n!}{s^{n+1}}$ هو $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)=t^n$ حيث $s>0$.

(3)

تحويل لابلاس للدالة الثابتة $f(t)=c$ حيث c أي عدد ثابت هو $\mathscr{L}(c)=\frac{c}{s}$، وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{c}{s}$ هو $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{c}{s}\right)=c$ حيث $s>0$.

الإثبات نجده في

$$\mathcal{L}(c)=\int_0^\infty ce^{-st}dt=c\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-st}dt$$

$$=c\lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_0^\alpha=\frac{c}{s}\;;\;s>0$$

(4) تحويل لابلاس للدالة $f(t)=\cos(at)$، حيث a أي عدد ثابت هو $\mathcal{L}(\cos(at))=\frac{s}{s^2+a^2}$، وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{s}{s^2+a^2}$ هو $\cos(at)$.

لدينا

$$\mathcal{L}(\cos(at))=\int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt=\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \cos(at)e^{-st}dt$$

باستخدام قاعدة التكامل بالتجزيء مرتين لحساب التكامل $\int_0^\beta \cos(at)e^{-st}dt$، نجد أن

$$\int_0^\beta \cos(at)e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\cos(at)+a\sin(at))\right]_0^\beta$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\cos(at)+a\sin(at))\right]_0^{\beta}$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left[\frac{e^{-s\beta}}{s^2+a^2}(-s\cos(a\beta)+a\sin(a\beta))+\frac{s}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}$$

(5) تحويل لابلاس للدالـة $f(t)=\sin(at)$ حيث a أي عدد ثـابت هـو $\mathcal{L}(\sin(at))=\dfrac{a}{s^2+a^2}$ وتحويـل لابـلاس العكسـي للدالـة $\dfrac{a}{s^2+a^2}$ هو $\sin(at)$.

الإثبات

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \int_0^{\infty}\sin(at)e^{-st}\,dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}\sin(at)e^{-st}\,dt$$

باسـتخدام قـاعدة التكـامل بـالتجزيء لحسـاب التكـامل $I=\int_0^{\beta}\sin(at)e^{-st}\,dt$، نضع

$$u=\sin(at) \quad ,\ dv=e^{-st}\,dt$$
$$du=a\cos(at)\,dt \quad ,\ v=\frac{-1}{s}e^{-st}$$

وبالتالي فإن

$$I = \frac{-\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta} + \frac{a}{s} I_1$$

حيث

$$I_1 = \int_0^{\beta} \cos(at) e^{-st} dt$$

نضع

$$u = \cos(at) \quad , \quad dv = e^{-st} dt$$
$$du = -a \sin(at) dt \ , \quad v = \frac{-1}{s} e^{-st}$$

وبالتالي فإن

$$I_1 = \frac{-\cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta} - \frac{a}{s} I$$

إذاً

$$I = \frac{-\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta} + \frac{a}{s} \cdot \frac{-\cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta} - \frac{a^2}{s^2} I$$

أو

$$I\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = \frac{-\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta} + \frac{a}{s} \cdot \frac{-\cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta}$$

أي أن

$$I = \frac{s^2}{s^2 + a^2} \left\{ \frac{-\sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta} + \frac{\bar{a}}{s} \cdot \frac{-\cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^{\beta} \right\}$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}(\sin(at)) = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta}\sin(at)e^{-st}dt = \lim_{\beta\to\infty} I$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\frac{s^2}{s^2+a^2}\left\{\frac{-\sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^{\beta} + \frac{a}{s}\cdot\frac{-\cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^{\beta}\right\}$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\frac{s^2}{s^2+a^2}\left\{\left[\frac{-\sin(a\beta)}{s}e^{-s\beta}+0\right]\right.$$

$$\left.+\frac{a}{s}\left[\frac{-\cos(a\beta)}{s}e^{-s\beta}+\frac{1}{s}\right]\right\} = \frac{s^2}{s^2+a^2}\left(\frac{a}{s^2}\right) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

حيث a ثابت.

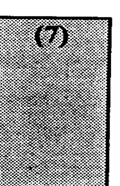
(6) تحويل لابلاس للدالة الأسية $f(t)=e^{kt}$ حيث k أي عدد ثابت هو $\mathcal{L}(e^{kt})=\frac{1}{s-k}$ حيث $s>k$، وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{1}{s-k}$ هو e^{kt}.

لدينا

$$\mathcal{L}(e^{kt}) = \int_0^{\infty}e^{kt}e^{-st}dt = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha}e^{-(s-k)t}dt$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{s-k}e^{-(s-k)t}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{-1}{s-k}e^{-(s-k)\alpha}+\frac{1}{s-k}\right] = \frac{1}{s-k}$$



تحويل لابلاس لدالة الجيب الزائدية $f(t)=\cosh(at)$ حيث a أي عدد ثابت هو $\mathcal{L}(\cosh(at))=\frac{s}{s^2-a^2}$، وتحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{s}{s^2-a^2}$ هو $\cosh(at)$ حيث $s>|a|$.

جدول 6.1

تحويل لابلاس $\mathcal{L}(f(t))$	الدالة $f(t)$
$\mathcal{L}(c)=\frac{c}{s}\ ;\ s>0$	$f(t)=c\ ;\ c\text{ - constant}$
$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\ ;\ s>0$	$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}\ ;\ s>0$	$f(t)=t$
$\mathcal{L}(t^n)=\frac{n!}{s^{n+1}}\ ;\ s>0$	$f(t)=t^n$
$\mathcal{L}(e^{kt})=\frac{1}{s-k}\ ;\ s>k$	$f(t)=e^{kt}$
$\mathcal{L}(\cos(at))=\frac{s}{s^2+a^2}$	$f(t)=\cos(at)$
$\mathcal{L}(\cosh(at))=\frac{s}{s^2-a^2}\ ;\ s>\|a\|$	$f(t)=\cosh(at)$
$\mathcal{L}(\sin(at))=\frac{a}{s^2+a^2}$	$f(t)=\sin(at)$
$\mathcal{L}(\sinh(at))=\frac{a}{s^2-a^2}\ ;\ s>\|a\|$	$f(t)=\sinh(at)$

جدول 6.2

الدالة $F(s)$	تحويل لابلاس العكسي $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$
$F(s)=\frac{c}{s}\ ;\ s>0$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{c}{s}\right)=c$
$F(s)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\ ;\ s>0$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}$
$F(s)=\frac{1}{s^2};\ s>0$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t$
$F(s)=\frac{n!}{s^{n+1}};\ s>0$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)=t^n$
$F(s)=\frac{1}{s-k}\ ;\ s>k$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-k}\right)=e^{kt}$
$F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)=\cos(at)$
$F(s)=\frac{s}{s^2-a^2};\ s>\lvert a\rvert$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right)=\cosh(at)$
$F(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)=\sin(at)$
$F(s)=\frac{a}{s^2-a^2};\ s>\lvert a\rvert$	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right)=\sinh(at)$

مثال 6.1 أوجد تحويلات لابلاس للدوال الآتية

(1) $f(t)=5\sin(2t)+10e^{-3t}$ (2) $g(t)=\sinh(2t)-t$

(3) $r(t)=\cos(4t)+(t-1)^2$

الحل

(1) $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left(5\sin(2t) + 10e^{-3t}\right) = 5\mathcal{L}(\sin(2t))$
$+10\mathcal{L}\left(e^{-3t}\right) = 5\cdot\dfrac{2}{s^2+4} + 10\cdot\dfrac{1}{s+3}$

(2) $\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(\sinh(2t) - t) = \mathcal{L}(\sinh(2t)) - \mathcal{L}(t)$
$= \dfrac{2}{s^2-4} - \dfrac{1}{s^2}$

(3) $\mathcal{L}(r(t)) = \mathcal{L}\left(\cos(4t) + (t-1)^2\right) = \mathcal{L}(\cos(4t))$
$+\mathcal{L}\left((t-1)^2\right) = \mathcal{L}(\cos(4t)) + \mathcal{L}\left(t^2 - 2t + 1\right)$
$= \dfrac{s}{s^2+16} + \dfrac{2!}{s^3} - 2\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s}$

.✍

مثال 6.2 **أوجد تحويلات لابلاس العكسية للدوال الآتية**

(1) $F(s) = \dfrac{4}{s^2+30}$ (2) $G(s) = \dfrac{-3s}{s^2+3} + \dfrac{5}{2s+3}$

(3) $R(s) = \dfrac{s+2}{(s+3)(s-3)} - \dfrac{10}{s}$

الحل

(1) $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4}{s^2+30}\right)$
$= \dfrac{4}{\sqrt{30}}\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{30}}{s^2+\left(\sqrt{30}\right)^2}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{30}}\sin\left(\sqrt{30}\,t\right)$

(2) $\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-3s}{s^2+3} + \frac{5}{2s+3}\right)$

$$= -3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right) + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s-\left(-\frac{3}{2}\right)}\right)$$

$$= -3\cos(\sqrt{3}\,t) + \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$$

(3) $\mathcal{L}^{-1}(R(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+3)(s-3)} - \frac{10}{s}\right)$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+3)(s-3)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{s}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s^2-9}\right) - 10\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-9}\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2-9}\right) - 10\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \cosh(3t) + 2\sinh(3t) - 10$$

✍.

6.2 مسائل

أوجد تحويلات لابلاس للدوال الآتية

(1) $f(t) = 2\sinh(2t) - 4$ (2) $f(t) = 4t^3e^{-t}$

(3) $f(t) = 4t\sin(2t)$ (4) $f(t) = \sinh^3(3t)$

(5) $f(t) = t - \cos(5t)$ (6) $f(t) = 2t\sin(3t)$

(7) $f(t) = 2t^2e^{-3t} - 4t + 1$ (8) $f(t) = t^2\cos(at)$

(9) $f(t)=\cos^2(2t)$

(10) $f(t)=te^{3t}+4t^4$

(11) $f(t)=t^n\sin(at)$

(12) $f(t)=t^2\cos(at)$

(13) $f(t)=t^n\cos(at)$

(14) $f(t)=t^n\sinh(at)$

(15) $f(t)=t\sin(at)$

(16) $f(t)=\sin^3(at)$

(17) $f(t)=t\cos(at)$

(18) $f(t)=t^4\sin(2t)$

(19) $f(t)=t^2\sin(at)$

(20) $f(t)=t\sinh^3(t)$

(21) $f(t)=t^2\cos(at)$

(22) $f(t)=t\cos^2(t)$

(23) $f(t)=t^3\sin(at)$

(24) $f(t)=t^2\cos^2(t)$

(25) $f(t)=4t^3\sin(t)$

(26) $f(t)=t^2\cos^2(2t)$

(27) $f(t)=(t-1)\cos(3t)$

(28) $f(t)=\sinh(t-1)$

(29) $f(t)=2\cosh^2(3t)$

(30) $f(t)=\cosh(t+1)$

أوجد تحويلات لابلاس العكسية للدوال الآتية

(31) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s+1}\right)$

(32) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-s}{s^2+1}+\frac{10}{s^2}\right)$

(33) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s}\right)$

(34) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-s}{s^2-1}+\frac{10}{s^2}\right)$

(35) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{4}{s-1}+\frac{1}{s^2}\right)$

(36) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1-s}{s^2-1}+\frac{10}{s^2}\right)$

(37) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+4}+\frac{5}{s^4}\right)$

(38) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{10-s}{s^2-1}+\frac{1}{s^3}\right)$

(39) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{10-s}{s^2+10}+\frac{1}{s^7}\right)$

(40) $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{s^2+10}\right)$

****

الباب
7

قواعد حساب تحويلات لابلاس
Rules of Laplace Transforms

إن المرجعية الوحيدة المتاحة لنا حتى الآن للحصول على تحويل لابلاس لأية دالة هو التعريف (6.1)، وذلك عن طريق إجراء التكامل كما في المعادلة (6.1). لكن! ما هو الموقف إذا كانت الدوال المكاملة صعبة ومعقدة؟ بالتأكيد أن هذا يدفعنا للبحث عن أساليب وقواعد لتسهيل عملية إيجاد تحويلات لابلاس. في هذا الباب نقدم بعض القواعد الهامة لتحويلات لابلاس. فنُعرِّج مثلاً على عملية الحصول على تحويلات لابلاس للمشتقات بأية درجة باعتبارها — أيضاً — دوال وذلك في حالة تحقيقها للشروط الواجبة لوجود تحويلات لابلاس. في هذا الباب — أيضاً — نتعرض لعملية إيجاد تحويلات لابلاس للدوال الدورية والتي أحياناً ما تعبر عن الحد غير المتجانس في المعادلات التفاضلية.

كذلك نوجد تحويلات لابلاس لحاصل ضرب دالتين إحداهما هي الدالة الأسية الطبيعية أو هي دالة كثيرة حدود. أيضا نوجد تحويلات لابلاس لما يسمى **"دالة الخطوة"** وما يسمى **"دالة الخطوة الإزاحية"** *(Shifted Unit Step Function)* لما في ذلك من أهمية كبرى في إمكانية التعبير بواسطتهم عن الدوال المتصلة على فترات.

أخيراً، ولكي نتمكن من استخدام تحويلات لابلاس في حل بعض المعادلات التفاضلية؛ نقدم تحويلات لابلاس للدوال ذات الإزاحة في المتغير المستقل حيث أن الكثير من المعادلات التفاضلية غير المتجانسة التي تظهر في تطبيقات الكثير من المسائل العلمية يكون فيها الحد غير المتجانس على شكل دوال إزاحية.

7.1 تحويلات لابلاس للمشتقات

لنعتبر الدالة $f(t)$، ولنفرض أن مشتقتها الأولى $f'(t)$ دالة متصلة على فترات على الفترة $[0,b]$ لكل $b>0$، إذاً يمكن تعريف تحويل لابلاس للمشتقة الأولى $f'(t)$ في الصورة

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\alpha e^{-st} f'(t)dt$$

ولحساب هذا التكامل الأخير نستخدم قاعدة التكامل بالتجزيء، لذلك نستخدم التعويضات

$$\begin{aligned} u &= e^{-st} \quad , \quad dv = f'(t)dt \\ du &= -se^{-st}dt \quad , \quad v = f(t) \end{aligned}$$

فنجد أن

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \lim_{\alpha\to\infty}\left\{ e^{-st}f(t)\Big|_0^{\alpha} + s\int_0^{\alpha} e^{-st}f(t)dt \right\}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left\{ e^{-s\alpha}f(\alpha) - f(0)\right\} + s\,\mathcal{L}(f(t))$$

إذاً

$$\boxed{\mathcal{L}(f'(t)) = s\,\mathcal{L}(f(t)) - f(0)} \qquad (7.1)$$

بنفس الطريقة السابقة يمكن إثبات أن تحويل لابلاس للمشتقة الثانية هو

$$\boxed{\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)} \qquad (7.2)$$

وبصفة عامة فإن تحويل لابلاس للمشتقة النونية يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة السابقة أيضاً. بدون الخوض في التفصيلات والاختصارات فإن

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)\\ &-s^{n-3}f''(0) - s^{n-4}f^{(3)}(0) - \ \dots \ - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}} \qquad (7.3)$$

مثال 7.1 أوجد الحل العام للمسألة الابتدائية

$$y'' - 4y = 0\ ; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

الحل بالتأثير بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة، نحصل على

$$\mathscr{L}\left(y''(x)\right)-4\mathscr{L}\left(y(x)\right)=\mathscr{L}(0)=0$$

وبما أنه، وباستخدام (7.2) لدينا

$$\mathscr{L}\left(y''(x)\right)=s^2\mathscr{L}\left(y(x)\right)-s\,y(0)-y'(0)$$

$$=s^2\mathscr{L}\left(y(x)\right)-s+2$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن

$$s^2\mathscr{L}\left(y(x)\right)-s+2-4\mathscr{L}\left(y(x)\right)=0$$

وهكذا نجد أن المسألة الابتدائية المعطاة قد تحولت إلى معادلة جبرية. المجهول فيها هو تحوبل لابلاس $\mathscr{L}(y)$. إذاً

$$\left[s^2-4\right]\mathscr{L}\left(y(x)\right)=(s-2)$$

وبالتالي فإن

$$\mathscr{L}\left(y(x)\right)=\frac{s-2}{\left(s^2-4\right)}$$

الآن ولكي نحصل على $y(x)$ علينا بإيجاد تحويل لابلاس العكسي

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2-4}\right)=y(x)$$

حيث نجد أن الحل المطلوب هو

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2-4}\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(-2)}\right)=e^{-2x}$$

انتبه! إلى حل المثال السابق بالطرق التقليدية. حيث نجد أن المعادلة المميزة تعطي

$$r^2-4=0 \quad \rightarrow \quad r=\pm 2$$

وبالتالي فالحل العام هو

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{2x}$$

لكننا نجد من الشروط الابتدائية أن

$$y(0)=c_1+c_2=1$$

كما نجد أن

$$y'(x)=-2c_1e^{-2x}+2c_2e^{2x}$$

أو

$$y'(0)=-2c_1+2c_2=-2$$

وبحل المعادلتين

$$-2c_1+2c_2=-2, \quad c_1+c_2=1$$

نجد أن $c_1=1$, $c_2=0$. إذاً الحل هو

$$y(x)=e^{-2x}$$

✍.

7.2 تحويـــلات لابلاس للـــدوال الـــدوريـــة
Laplace Transforms for Periodic Functions

لنفرض أن الدالة $f(t)$ هي دالة دوريـة، دورتـها هـي العدد الموجـب ρ، أي أن $f(t+i\rho)=f(t)$، حيـث i هـو أي عـدد صحيح. فما هو تحويل لابلاس لهذه الدالة في حالة وجـوده؟ الإجابة تبدأ من المعادلة (6.1) حيث نجـد أن تحويـل لابـلاس لهذه الدالة الدورية هو

$$\mathscr{L}(f(t))=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

وبما أن $f(t)$ دالة دورية دورتـها ρ، إذاً فإن

$$\mathscr{L}(f(t))=\int_0^{\rho} e^{-st} f(t)dt+\int_{\rho}^{2\rho} e^{-st} f(t)dt$$

$$+\int_{2\rho}^{3\rho} e^{-st} f(t)dt+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{i\rho}^{(i+1)\rho} e^{-st} f(t)dt$$

وباستخدام التعويض

$$t=x+i\rho \quad\rightarrow\quad dt=dx$$

نجد أنه عندما تكون $t=i\rho$ فإن $x=0$، وعندما $t=(i+1)\rho$ فإن $x=\rho$. وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{0}^{\rho} e^{-s(x+i\rho)} f(x+i\rho)dx$$

وباستبدال متغير التكامل x (متغير اختياري) بالمتغير الجديد t نحصل على

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{0}^{\rho} e^{-s(t+i\rho)} f(t+i\rho)dt$$

وبما أن الدالة $f(t)$ دورية، بمعنى أن

$$f(t+i\rho) = f(t)$$

إذاً

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{0}^{\rho} e^{-s(t+i\rho)} f(t)dt$$

أو

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{-s\rho}\right)^{i} \int_{0}^{\rho} e^{-st} f(t)dt$$

وبما أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n} = \frac{1}{1-a} \quad ; \quad |a| < 1$$

إذاً

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(e^{-s\rho}\right)^{i} = \frac{1}{1-e^{-s\rho}} \quad ; \quad e^{-s\rho} < 1$$

وهكذا نجد أن

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-\left(e^{-s\rho}\right)} \int_0^{\rho} e^{-st} f(t)dt \qquad (7.4)$$

مثال 7.2 أوجد تحويل لابلاس للدالة

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; \ 4n \le t < 4n+4 \\ -1 & ; \ 4n+4 \le t \le 4n+8 \end{cases} \quad ; \ n = 0, 2, 4, 6, \dots$$

الحل بما أن الدالة $f(t)$ هي دالة دورية، دورتها $\rho = 8$، حيث $f(t+8) = f(t)$، إذاً فإن

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-8s}} \int_0^8 e^{-st} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-8s}} \left[\int_0^4 e^{-st}(1)dt + \int_4^8 e^{-st}(-1)dt \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-8s}} \left[\left. \frac{-1}{se^{st}} \right|_0^4 + \left. \frac{1}{se^{st}} \right|_4^8 \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-8s}} \left[\left(\frac{-1}{se^{4s}} + \frac{1}{s} \right) + \left(\frac{1}{se^{8s}} - \frac{1}{se^{4s}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-8s}} \left[\frac{1}{s} - \frac{2}{se^{4s}} + \frac{1}{se^{8s}} \right] = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1-e^{-8s}} \right) \left[1 - \frac{1}{e^{4s}} \right]^2$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-e^{-8s}}\right)\left[\frac{e^{4s}-1}{e^{4s}}\right]^2 = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-\left(e^{-4s}\right)^2}\right)\left[\frac{1-e^{-4s}}{1}\right]^2$$

$$= \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{\left(1-e^{-4s}\right)^2}{\left(1-e^{-4s}\right)\left(1+e^{-4s}\right)}\right) = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1-e^{-4s}}{1+e^{-4s}}\right)$$

✍.

7.3 تحويلات لابلاس لحاصل ضرب الدالتين $t^n, f(t)$

في هذا الفصل نبحث عن تحويل لابلاس لحصل ضرب دالتين إحداهما دالة كثيرة الحدود t^n. لنفرض أن تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ هو

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

والمطلوب هو إيجاد تحويل لابلاس لحاصل ضرب الدالتين $t^n, f(t)$، أي أن المطلوب هو حساب $\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right)$. بما أن

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

بتفاضل طرفي المعادلة الأخيرة – جزئياً – بالنسبة إلى المتغير s نحصل على

$$F'(s)=\int_0^\infty -te^{-st}f(t)dt=\mathcal{L}(-tf(t));$$

$$F''(s)=\int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt=\mathcal{L}(t^2f(t));$$

$$F^{(3)}(s)=\int_0^\infty -t^3e^{-st}f(t)dt=\mathcal{L}(-t^3f(t));$$

ونستمر حتى نصل إلى أن

$$F^{(n)}(s)=\int_0^\infty (-1)^n t^n e^{-st}f(t)dt=\mathcal{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right)$$

وهكذا، وبعد القسمة على $(-1)^n$ نحصل على القاعدة الهامة، والتي تنص على أن

$$\boxed{\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right)=(-1)^n F^{(n)}(s)=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f(t))} \qquad (7.5)$$

هذه القاعدة عادة ما تستخدم في حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة مثل معادلات أويلر ـ كما سنرى في فصل (8.7) من الباب القادم.

7.4 تحويلات لابلاس لحاصل ضرب الدالتين $f(t)$, $e^{\beta t}$

ماذا نتوقع الآن لو كان المطلوب هو إيجاد تحويل لابلاس للمقدار $e^{\beta t}f(t)$، حيث β عدد صحيح موجب، أي ماذا

نتوقع إذا كان المطلوب هو إيجاد $\mathscr{L}\left(e^{\beta t} f(t)\right)$. دعنا نبدأ الحسابات لنرى ما هي النتيجة. لدينا

$$\mathscr{L}\left(e^{\beta t} f(t)\right) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\beta t} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-\beta)t} f(t)\,dt = F(s-\beta)$$

أي أن

$$\boxed{\mathscr{L}\left(e^{\beta t} f(t)\right) = F(s-\beta)\ ;\ \ s > \beta} \qquad (7.6)$$

ماذا تعني هذه النتيجة أو هذه القاعدة؟ تعني أنه إذا كان تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ فقط هو الدالة $F(s)$ فإن تحويل لابلاس لحاصل ضرب الدالة $f(t)$ مضروبة في الدالة الأسية $e^{\beta t}$ هو الدالة $F(s-\beta)$. أي هي نفس الدالة $F(s)$ مع إزاحة المتغير s بمقدار β.

في الواقع فإن الدالة الإزاحية $F(s-\beta)$ تسمى **"تحويل لابلاس ذو الإزاحة في المتغير s"** وبالإنجليزية تسمى

(Laplace Transform with Shift in the s-Variable).

مثال 7.3 أوجد تحويل لابلاس للدالة

$$u(t) = e^{5t}\cos(3t)$$

الحل لنعتبر أن $f(t)=\cos(3t),\quad \beta=5$. إذاً من (7.6) نجد أن

$$\mathcal{L}(u(t))=\mathcal{L}\left(e^{5t}\cos(3t)\right)=F(s-5)$$

ولكي نحصل على $F(s-5)$، نوجد ـ أولاً ـ $F(s)$، ثم نزيح المتغير s بمقدار 5. على أية حال فإن

$$F(s)=\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(\cos(3t))=\frac{s}{s^2+9}$$

وبالتالي فإن
$$F(s-5)=\frac{s-5}{(s-5)^2+9}$$

إذاً فإن
$$\mathcal{L}\left(e^{5t}\cos(3t)\right)=\frac{s-5}{(s-5)^2+9}$$

✍.

مثال 7.4 أوجد تحويل لابلاس للدالة $z(t)=e^{-3t}t^2$.

الحل من (7.6) نجد أن

$$\mathcal{L}(z(t))=\mathcal{L}\left(e^{-3t}t^2\right)=F(s-(-3))=F(s+3)$$

وبما أن
$$F(s)=\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}\left(t^2\right)=\frac{2!}{s^3}$$

إذاً فإن
$$F(s+3)=\frac{2!}{(s+3)^3}$$

وبالتالي فإن $\mathscr{L}\left(e^{-3t}t^2\right)=\dfrac{2}{(s+3)^3}$

وأيضاً من (7.5) نجد أن

$$\mathscr{L}\left(e^{-3t}t^2\right)=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}(f(t))=\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\left(e^{-3t}\right)$$

$$=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+3}\right)=\frac{d}{ds}\frac{-1}{(s+3)^2}=\frac{2}{(s+3)^3}$$

✍.

7.5 تحويلات لابلاس لدوال الإزاحة في المتغير المستقل
Laplace Transforms for Shifted Functions

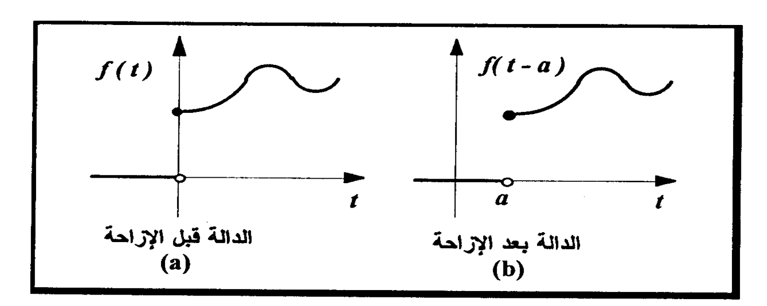
انظر شكل (7.1) جزء (a) لترى الدالة $f(t)$ والمعرفة – رياضياً – كما في الشكل

$$f(t)=\begin{cases} f(t) & ; \quad t\ge 0 \\ 0 & ; \quad t<0 \end{cases} \tag{7.7}$$

انظر – أيضاً – شكل (7.1) جزء (b)، لترى كيف أن المتغير t قد تمت إزاحته بمقدار a، حيث a ثابت موجب، لنحصل على الدالة $f(t-a)$ في الشكل

$$f(t-a)=\begin{cases} f(t-a) & ; \quad t-a\ge 0 \ (t\ge a) \\ 0 & ; \quad t-a<0 \ (t<a) \end{cases} \tag{7.8}$$

في الواقع فإن الدالة $f(t-a)$ تسمى **"دالة الإزاحة"**.



شكل 7.1

المطلوب الآن هو إيجاد تحويل لابلاس لدالة الإزاحة $f(t-a)$، مع الأخذ في الاعتبار أن تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ هو $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$. أي أن المطلوب هو معرفة شكل تحويل لابلاس $\mathcal{L}(f(t-a))$. بما أن

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s) \tag{7.9}$$

إذاً فإن

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{7.10}$$

بضرب طرفي المعادلة (7.10) في الدالة الأسية e^{-as}، حيث a ثابت ما نحصل على العلاقة

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-as}e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(a+t)} f(t)dt \tag{7.11}$$

نفرض التعويض

$$x = t + a \;\rightarrow\; t = x - a \;,\; dx = dt \qquad (7.12)$$

والذي يعني أن

$$t = 0 \;\Rightarrow x = a \;,\; t \rightarrow \infty \;\Rightarrow\; x \rightarrow \infty \qquad (7.13)$$

نضع في العلاقة (7.11) التعويضات (7.13) ,(7.12) فتتحول إلى العلاقة

$$e^{-as} F(s) = \int_a^\infty e^{-sx} f(x-a)dx \qquad (7.14)$$

ولأن متغير التكامل *(Integration Variable)* في الطرف الأيمن هو متغير حر *(Dummy Variable)*، إذاً يمكن أن نستبدل المتغير t بالمتغير x فتتحول (7.14) إلى

$$e^{-as} F(s) = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt \qquad (7.15)$$

وبما أنه يمكن إضافة المقدار $\int_0^a e^{-st}(zero)dt$ إلى الطرف الأيمن من العلاقة (7.15) بدون أن تتغير (لأن هذا المقدار يساوي الصفر)، إذاً يمكن أن نجد

$$e^{-as}F(s) = \int_0^a e^{-st}(zero)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \mathcal{L}(f(t-a)) \tag{7.16}$$

وبالتالي فإن

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t-a)) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))} \tag{7.17}$$

ماذا تعني

القاعدة الرياضية (7.17)؟ تعني أن تحويل لابلاس لأية دالة إزاحية $f(t-a)$، يساوي تحويل لبلاس لنفس الدالة قبل عملية الإزاحة (الدالة $f(t)$) مضروباً في الدالة الأسية e^{-as}، حيث a هو مقدار الإزاحة.

مثال 7.5

أوجد تحويل لابلاس للدالة

$$g(t-5) = \begin{cases} t-5 & ; \quad t-5 \geq 0 \\ 0 & ; \quad t-5 < 0 \end{cases}$$

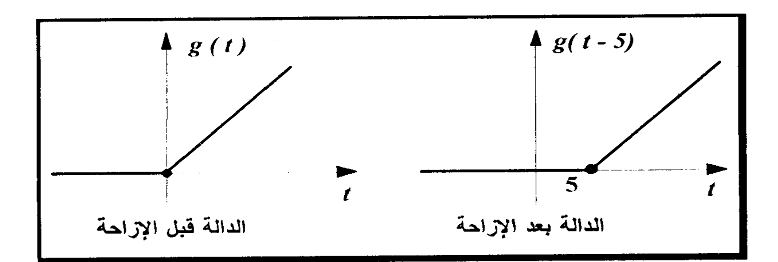
الحل

المطلوب هو حساب $\mathcal{L}(g(t-5))$. ولأن الدالة $g(t-5)$ هي دالة إزاحة $(a=5)$، إذاً، باستخدام (7.17) نجد أن المطلوب هو حساب

$$\mathcal{L}(g(t-5)) = e^{-5s}\mathcal{L}(g(t))$$

حيث $g(t)$ هي الدالة التي تم إزاحتها بمقدار 5 وحدات لجهة اليمين فأعطت الدالة $g(t-5)$. انظر شكل (7.2).

شكل 7.2



إذاً فإن

$$g(t)=\begin{cases} t & ; \ t\geq 0 \\ 0 & ; \ t<0 \end{cases}$$

ويكون تحويل لابلاس للدالة $g(t)$ هو

$$\mathscr{L}(g(t))=\mathscr{L}(t)=\frac{1}{s^2}$$

وبالتالي فإن

$$\mathscr{L}(g(t-5))=\frac{e^{-5s}}{s^2}$$

✍.

7.6 تحويلات لابلاس لدالة الخطوة
Unit - Step Function

في هذا الفصل نتعرف على نوعية هامة من الدوال تسمى دالة الخطوة. تلك الدوال التي تساعد - أحياناً - في التعبير عن بعض الدوال التي تكون معرفة على فترات وليس على

فترة واحدة مثل دالة النبضة. كذلك نتعرف على ما يسمى دالة الإزاحة لدالة الخطوة *(Shifted Unit - Step Function)* وأيضاً على تحويلات لابلاس لمثل هذه الدوال، وكيفية استخدامها في حل المعادلات التفاضلية التي يكون فيها الحد غير المتجانس دالة معرفة على أكثر من فترة.

تعريف 7.1 تعرف دالة الخطوة على أنها الدالة

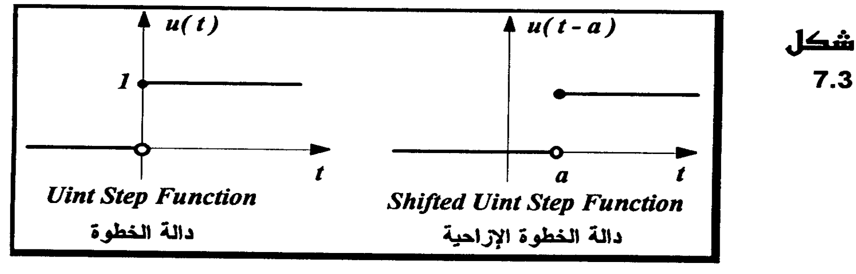
$$u(t)=\begin{cases}1 & ; \quad t\geq 0\\ 0 & ; \quad t<0\end{cases} \tag{7.18}$$

إذا أزيحت هذه الدالة لجهة اليمين بمقدار a عندئذٍ يمكن أن نعرف دالة الإزاحة لها في الشكل

$$u(t-a)=\begin{cases}1 & ; \quad t\geq a\\ 0 & ; \quad t<a\end{cases} \tag{7.19}$$

انظر شكل (7.3).

شكل 7.3



Uint Step Function دالة الخطوة — *Shifted Uint Step Function* دالة الخطوة الإزاحية

في الواقع فإنه يمكن فهم دالة الخطوة (7.18)، ودالة الخطوة الإزاحية (7.19) على أنهما يقومان بمهمة المحايد الضربي *(Multiplicative Identity)* ولكن في فضاء الدوال وليس الأعداد. على هذا الأساس يمكن ضرب كل من الدالة $f(t)$ المعطاة في (7.7) في دالة الخطوة المعطاة في (7.18) بدون أن تتغير، كما يمكن ضرب دالة الإزاحة لها والمعطاة في (7.8) في دالة الخطوة الإزاحية (7.19) بدون أن تتغير أيضاً. انطلاقاً من هذا المعنى يمكن التعبير عن الدالة $f(t)$ المعطاة في (7.7) والدالة الإزاحية (7.8) بدلالة دالة الخطوة ودالة الخطوة الإزاحية كما يلي

$$u(t)f(t)=\begin{cases} f(t) & ; \quad t\geq 0 \\ 0 & ; \quad t<0 \end{cases} \; ;$$

$$u(t-a)f(t-a)=\begin{cases} f(t\quad a) & ; \quad t-a\geq 0 \\ 0 & ; \quad t-a<0 \end{cases}$$

وبما أنه من (7.17) لدينا

$$\mathscr{L}(f(t-a))=e^{-as}\mathscr{L}(f(t))$$

إذاً فإننا نحصل على القاعدة الهامة

$$\boxed{\mathscr{L}(u(t-a)f(t-a))=e^{-as}\mathscr{L}(f(t))} \qquad (7.20)$$

حيث $f(t-a)$ هي دالة الإزاحة، كما أن $f(t)$ هي الدالة قبل الإزاحة، أما a فهو مقدار الإزاحة.

ماذا تعني

القاعدة الرياضية (7.20) ؟ تعني أن تحويل لابلاس لأية دالة إزاحية $f(t-a)$ مضروبة في دالة الخطوة الإزاحية يساوي تحويل لبلاس لنفس الدالة قبل الإزاحة (الدالة $f(t)$) مضروباً في الدالة الأسية e^{-as}.

ويمكن القول أن القاعدة (7.20) هي تعميم للقاعدة (7.17). وتظهر قيمة هذه القاعدة وفائدتها في حالة الدوال المعرفة على أكثر من فترة ـ كما سنرى في الأمثلة الآتية.

مثال 7.6

أوجد تحويل لابلاس للدالة

$$r(t)=\begin{cases}\sin(2(t-5)) & ; \quad t\geq 5\\ 0 & ; \quad t<5\end{cases}$$

الحل

المطلوب هو حساب $\mathscr{L}(r(t))$. ولأن الدالة $r(t)$ يمكن اعتبارها دالة إزاحة ($a=5$)، إذاً يمكن إعادة كتابة الدالة المعطاة بدلالة دالة الخطوة الإزاحية في الشكل

$$r(t)=u(t-5)\sin(2(t-5))$$

وبالتالي فإن

$$\mathscr{L}(r(t))=\mathscr{L}(u(t-5)\sin(2(t-5)))$$

باستخدام (7.20) نجد أن

$$\mathcal{L}\left(u(t-5)\sin\left(2(t-5)\right)\right)=e^{-as}\mathcal{L}\left(\sin(2t)\right)$$

وبما أن

$$\mathcal{L}\left(\sin(2t)\right)=\frac{2}{s^2+4}$$

إذاً

$$\mathcal{L}\left(r(t)\right)=\mathcal{L}\left(u(t-5)\sin\left(2(t-5)\right)\right)=e^{-5s}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

✍.

مثال 7.7 أوجد تحويل لابلاس للدالة

$$k(t)=\begin{cases}t^2+7 & ; \quad t\geq 3\\ 0 & ; \quad t<3\end{cases}$$

الحل المطلوب هو حساب $\mathcal{L}(k(t))$. ولأن الدالة $k(t)$ ليست على شكل دالة إزاحية فلا يمكن استخدام أيٍ من القاعدتين (7.17), (7.20). على أية حال نحاول وضع الدالة $k(t)$ على شكل دالة إزاحية. بما أن

$$t^2+7=(t-3)^2+6(t-3)+16$$

إذاً، نعيد كتابة الدالة $k(t)$ لتأخذ الشكل

$$k(t)=\begin{cases}(t-3)^2+6(t-3)+16 & ; \quad t\geq 3\\ 0 & ; \quad t<3\end{cases}$$

وباستخدام دالة الخطوة الإزاحية المعطاة في (7.19) للتعبير عن الدالة $k(t)$ نحصل على

$$k(t) = u(t-3)\left[(t-3)^2 + 6(t-3) + 16\right]$$

إذاً، باستخدام القاعدة (7.20)، مع الأخذ في الاعتبار أن $a = 3$ نجد أن

$$\mathscr{L}(k(t)) = \mathscr{L}\left(u(t-3)\left[(t-3)^2 + 6(t-3) + 16\right]\right)$$
$$= e^{-3s}\mathscr{L}\left(t^2 + 6t + 16\right)$$

وبما أن

$$\mathscr{L}\left(t^2 + 6t + 16\right) = \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{16}{s}$$

إذاً

$$\mathscr{L}(k(t)) = e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{16}{s}\right)$$

ملاحظة

نلاحظ أنه يمكن الحصول على نفس النتيجة السابقة لتحويل لابلاس، $\mathscr{L}(k(t))$، وذلك عن طريق وضع الدالة $k(t)$ على شكل الدالة الإزاحية (7.8) واستخدام العلاقة (7.17). بما أنه يمكن وضع الدالة $k(t)$ في الشكل

$$k(t-3)=\begin{cases}(t-3)^2+6(t-3)+16 & ;\ t-3\geq 0\\ 0 & ;\ t-3<0\end{cases}$$

بالتالي نجد من (7.17) أن

$$\mathcal{L}(k(t-3))=e^{-3s}\mathcal{L}(k(t))=e^{-3s}\mathcal{L}\left(t^2+6t+16\right)$$

$$=e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{16}{s}\right)$$

من الضروري التنبه إلى أن الحل بهذه الطريقة لايمكن تطبيقه على كل الدوال. فمثلاً تحويل لابلاس للدالة التي في المثال التالي لايمكن الحصول عليه إلا باستخدام دالة الخطوة الإزاحية (7.19) والقاعدة (7.20).

مثال 7.8 أوجد تحويل لابلاس للدالة

$$z(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<0\\ 2 & ,\ 0\leq t<5\\ 2t & ,\ 5\leq t<8\\ \frac{1}{7}t^2 & ,\ t\geq 8\end{cases}$$

الحل المطلوب هو حساب $\mathcal{L}(z(t))$. ولأن الدالة $z(t)$ ليست على شكل دالة إزاحية فلا يمكن استخدام أيٍ من القاعدتين (7.17)، (7.20).

على أية حال، نحاول التعامل مع الدالة $z(t)$ على اعتبار أنها مكونة من الأربع دوال $z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x)$. حيث

$$z_1(x) = 0, \quad z_2(t) = 2(1 - u(t-5));$$

$$z_3(t) = 2t(u(t-5) - u(t-8)), \quad z_4(t) = \frac{1}{7}t^2 u(t-8)$$

والسؤال الذي يفرض نفسه الآن هو: كيف نتأكد من أن الدوال $\{z_i\}_{i=1}^4$ تعبر فعلاً عن الدالة $z(t)$ على الفترة $]-\infty;\infty[$؟ فهل مثلاً تعبر الدالة $z_3(t)$ فعلاً عن الدالة $z(t)$ على الفترة $]5,8[$؟ الإجابة عن هذا السؤال تستدعي دراسة الدالة $z_3(t)$ على الثلاث فترات $t < 5,\ 5 \le t < 8,\ t \ge 8$. لكن بدايةً لدينا

$$u(t-5) = \begin{cases} 0 \ ; & t < 5 \\ 1 \ ; & t \ge 5 \end{cases}; \quad u(t-8) = \begin{cases} 0 \ ; & t < 8 \\ 1 \ ; & t \ge 8 \end{cases}$$

بما أن دالتي الخطوة الإزاحيتين $u(t-5), u(t-8)$ تتلاشيتان في حالة أن $t < 5$. إذا فإن $z_3(t) = 0$ في حالة $t < 5$، أما في حالة أن $5 \le t < 8$ فإن $z_3(t) = 2t$، وذلك لأن

$$u(t-5) = 1, \quad u(t-8) = 0$$

وعند $t \ge 8$ نجد أن $z_3(t) = 0$، وذلك لأن

$$u(t-5)=1,\ \ u(t-8)=1$$

وهكـذا، وبنفـس الطريقـة يمكـن التـأكد مـن أن الـدوال $z_1(x),\ z_2(x),\ z_4(x)$ تعبر فعلاً عن الدالة $z(t)$ على الفترات المقابلة.

إذاً يمكن القـول أن تحويـل لابـلاس للدالـة المعطـاة يسـاوي تحويل لابلاس لمجموع الدوال $z_1(x),\ z_2(x),\ z_3(x),\ z_4(x)$.

أي أن

$$\mathscr{L}(z(t))=\mathscr{L}(z_1(x)+z_2(x)+z_3(x)+z_4(x))$$

$$=\mathscr{L}\left(2(1-u(t-5))+2t(u(t-5)-u(t-8))+\frac{1}{7}t^2u(t-8)\right)$$

$$=\mathscr{L}\left(2+(2t-2)u(t-5)+\left(\frac{1}{7}t^2-2t\right)u(t-8)\right)$$

هذا، وحتى نتمكن من استخدام القاعدة (7.20) دعنا نتصـرف ـ جبرياً ـ مع الدوال $\left(\frac{1}{7}t^2-2t\right)$, $(2t-2)$. بما أن

$$2t-2=2(t-5)+8$$

وبما أن

$$\frac{1}{7}t^2-2t=\frac{1}{7}(t-8)^2+\frac{16}{7}t-\frac{64}{7}-2(t-8)-16$$

$$=\frac{1}{7}(t-8)^2-2(t-8)+\frac{16}{7}(t-8)+\frac{128}{7}-\frac{64}{7}-16$$

$$=\frac{1}{7}(t-8)^2-2(t-8)+\frac{16}{7}(t-8)-\frac{48}{7}$$

$$= \frac{1}{7}(t-8)^2 + \frac{2}{7}(t-8) - \frac{48}{7}$$

إذاً فإن

$$\mathcal{L}(z(t)) = \mathcal{L}\Big(2 + [2(t-5)+8]u(t-5)$$

$$+\left[\frac{1}{7}(t-8)^2 + \frac{2}{7}(t-8) - \frac{48}{7}\right]u(t-8)\Big)$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}(z(t)) = 2\mathcal{L}(1) + e^{-5s}\mathcal{L}(2t+8)$$

$$+e^{-8s}\mathcal{L}\left(\frac{1}{7}t^2 + \frac{2}{7}t - \frac{48}{7}\right)$$

$$= \frac{2}{s} + e^{-5s}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{8}{s}\right) + e^{-8s}\left(\frac{2}{7s^3} + \frac{2}{7s^2} - \frac{48}{7s}\right)$$

.✍

7.7 مسائل

أوجد تحويل لابلاس للدوال الآتية

(1) $t\,u(t-4)$

(2) $t^2 - \sin^2(2t) + 1$

(3) $2(t-4)u(t-4)$

(4) $u(t-2)t^2 - 3t^3$

(5) $\sinh(3t) + \cosh(3t) - 2t^3$

(6) $\sinh^2(t) + \cosh^2(t)$

(7) $\sinh(6t)+e^{-t}\cosh(t)$ (8) $\sin(6t)+e^{-t}\cos(t)$

(9) $e^{2t}\cos(5t)-3t^3$ (10) $e^{-2t}\sin(5t)-t^2$

(11) $3e^{-4t}\sin(2t)$ (12) $e^{-3t}\cosh(2t)$

(13) $f(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<4\\ 2t^3 & , \quad t\ge 4\end{cases}$ (14) $f(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<4\\ 3t^2 & , \quad t\ge 4\end{cases}$

(15) $e^{-4t}\cosh(6t)$ (16) $-e^{-3t}\sin(4t)+3$

(17) $\begin{cases}h\ , & 4n\le t<4n+4\\ -h, & 4n+4\le t<4n+8\end{cases}$

$n=2,4,6,8,\ldots$

(18) $\begin{cases}-h, & 2n\le t<2n+1\\ 2h, & 2n+1\le t<2n+2\end{cases}$

$n=1,2,3,4,\ldots$

(19) $\begin{cases}2t\ , & 0\le t<5\\ t+2, & t\ge 5\end{cases}$ (20) $\begin{cases}2t^2\ , & 0\le t<5\\ t-3, & t\ge 5\end{cases}$

(21) $\begin{cases}-2t^2\ , & 0\le t<9\\ (t+1)^3, & t\ge 9\end{cases}$ (22) $\begin{cases}-2t\ , & 0\le t<4\\ (t+1)^2, & t\ge 4\end{cases}$

(23) $t-\left(7t^2+30\right)u(t-1)$ (24) $\left(7t^3+30\right)u(t-1)$

(25) $\left(t^4-3t^2+2\right)u(t-9)$ (26) $\left(t^4-3t^2+2\right)u(t-1)$

****

الباب
8

طرق حساب تحويلات لابلاس العكسية
Calculating of Inverse Laplace Transforms

إن عملية إيجاد تحويلات لابلاس العكسية تكافيء في الحقيقة الإجابة عن السؤالين التاليين: إذا أُعطيت الدالة $F(s)$، بحيث أن $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$، فهل يمكن إيجاد الدالة $f(t)$، بشرط أن يكون $\mathscr{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$؟ وكيف؟

بالتأكيد يمكن الإجابة عن السؤال الأول بنعم، وذلك من مفاهيم المؤثرات والمؤثرات العكسية. أما الإجابة عن كيفية الحصول على تحويلات لابلاس العكسية فهي بسيطة جداً. إذ أن هذا يمكن أن يحدث فوراً باستخدام جدول (6.2) الخاص بتحويلات لابلاس العكسية، فإذا لم يكن ذلك ممكناً نحاول أن نبسط شكل الدالة $F(s)$ بواسطة نظرية الكسور الجزئية - مثلاً - أو بواسطة أية عمليات جبرية أخرى بحيث تتحول الدالة $F(s)$ في النهاية إلى أحد الصور الموجودة بجداول تحويلات لابلاس العكسية، فإذا لم يكن ذلك ممكناً أيضا نستخدم قواعد تحويلات لابلاس بطريقة عكسية، أو بعض الطرق الأخرى كما سنرى.

على أية حال، سنقدم في هذا الباب عدد 6 طرق أو قواعد لحساب تحويلات لابلاس العكسية. ولنبدأ بالطريقة الأولى، والتي سوف نطلق عليها اسم "**طريقة الجداول**" لحساب تحويلات لابلاس العكسية".

8.1 الحصول على تحويلات لابلاس العكسية باستخدام الجداول

هذه الطريقة تعتمد على مدى معرفتك وإلمامك بجداول تحويلات لابلاس العكسية. وهذه الجداول عبارة عن صور لبعض تحويلات لابلاس العكسية المعروفة، قد استنتجت ووضعت في جدوال بغرض تطبيقها بدون الخوض في كيفية الحصول عليها. هذا ويمكن إضافة المزيد من تحويلات لابلاس العكسية إلى الجداول بمجرد حصولك على تحويل لابلاس لأية دالة جديدة. فمثلاً إذا حصلت على تحويل لابلاس للدالة $f(t)=\sin(at)$ ووجدت أنه $F(s)=\frac{a}{s^2+a^2}$،

أي أنه إذا كان

$$\mathscr{L}(f(t))=\mathscr{L}(\sin(at))=\frac{a}{s^2+a^2}=F(s)$$

فعندئذٍ يمكن فوراً الحصول على تحويل لابلاس العكسي $\mathscr{L}^{-1}(F(s))$، حيث نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}(F(s))=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)=\sin(at)$$

مثال 8.1 احسب تحويل لابلاس العكسي $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{15}{s^2+3^2}\right)$.

الحل من الواضح أنه يمكن حساب تحويل لابلاس العكسي المطلوب باستخدام النتيجة السابقة، حيث نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{15}{s^2+3^2}\right)=5\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)=5\sin(3t)$$

.✍

8.2 الحصول على تحويلات لابلاس العكسية باستخدام الكسور الجزئية

الدوال الكسرية والتي لايمكن الحصول على تحويلات لابلاس العكسية لها مباشرة باستخدام الجداول يمكن أن يتم تبسيطها باستخدام نظرية الكسور الجزئية *(Partial Fractions)*، ومن ثم يمكن استخدام الجداول.

مثال 8.2 احسب تحويل لابلاس العكسي $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s(s^2+9)}\right)$.

الحل من الواضح أنه لايمكن حساب تحويل لابلاس العكسي للدالة $\frac{3}{s(s^2+9)}$ باستخدام الجداول، ولكن باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{3}{s(s^2+9)}=\frac{\frac{1}{3}}{s}+\frac{-\frac{1}{3}s}{(s^2+9)}$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s\left(s^2+9\right)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{s}+\frac{-\frac{1}{3}s}{\left(s^2+9\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{\left(s^2+9\right)}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos(3t)$$

.✍

8.3 الحصول على تحويلات لابلاس العكسة في حالة إزاحة البارامتر - s

رأينا في (7.6) أن

$$\mathcal{L}\left(e^{\beta t}f(t)\right)=F(s-\beta);\quad s>\beta$$

حيث

$$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$$

إذاً، وحسب تعريف (6.3) في الباب السادس نجد أن تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s-\beta)$ هو

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(F(s-\beta))=e^{\beta t}f(t);\ s>\beta} \tag{8.1}$$

بشرط أن

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s)) \tag{8.2}$$

مثال 8.3 أوجد تحويل لابلاس العكسي

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-5s+6}\right)$$

الحل بقليل من التصرفات الرياضية يمكن إزاحة البارامتر s بمقدار β لتتحول الدالة $\frac{1}{s^2-5s+6}$ إلى الدالة $F(s-\beta)$. بما أن

$$\frac{1}{s^2-5s+6}=\frac{1}{\left(s-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6}$$

$$=\frac{1}{\left(s-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=F\left(s-\frac{5}{2}\right)$$

وبالتالي فإن

$$F(s)=\frac{1}{s^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

إذاً، باستخدام القاعدة (8.1) نحصل على

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-5s+6}\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left(s-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)=e^{\frac{5}{2}t}f(t)$$

حيث

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}(F(s))=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)$$

$$=2\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)=2\sinh\left(\frac{1}{2}t\right)$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-5s+6}\right)=2e^{\frac{5}{2}t}\sinh\left(\frac{1}{2}t\right)$$

بطريقة أخرى باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{1}{s^2-5s+6}=\frac{-1}{s-2}+\frac{1}{s-3}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-5s+6}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s-2}+\frac{1}{s-3}\right)$$

$$=-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)=e^{3t}-e^{2t}$$

وهي نفس النتيجة السابقة، حيث أن

$$2e^{\frac{5}{2}t}\sinh\left(\frac{1}{2}t\right)=2e^{\frac{5}{2}t}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}t}-e^{-\frac{1}{2}t}}{2}\right)=e^{3t}-e^{2t}$$

8.4 الحصول على تحويلات لابلاس العكسية باستخدام مفاهيم دوال الخطوة

بما أنه من (7.19) لدينا

$$\mathcal{L}(u(t-a)f(t-a))=e^{-as}F(s)$$

إذاً فإن

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right)=u(t-a)f(t-a)} \qquad (8.3)$$

بشرط أن

$$\boxed{f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(F(s)\right)} \qquad (8.4)$$

ماذا تعني القاعدة الرياضية (8.4) - (8.3)؟

تعني أن تحويل لابلاس العكسي لأية دالة $F(s)$ مضروبة في الدالة الأسسية e^{-as} يساوي دالة الخطوة الإزاحية $u(t-a)$ مضروبة في الدالة الإزاحية $f(t-a)$ حيث $f(t)$ هي تحويل لابلاس العكسي للدالة $F(s)$.

مثال 8.4 أوجد تحويل لابلاس العكسي

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2-5s+6}\right)$$

الحل المطلوب هو تحويل لابلاس العكسي للمقدار

$$\frac{e^{-2s}}{s^2-5s+6}=e^{-2s}F(s);\quad F(s)=\frac{1}{s^2-5s+6}$$

وبما أن هـذا المقدار يحتـوي علـى الدالـة الأسـية e^{-2s}، إذاً وعلى الفور نستخدم القاعدة الرياضيـة (8.4) - (8.3)، فنجـد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2-5s+6}\right)=u(t-2)\,f(t-2)$$

حيث

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-5s+6}\right)=e^{3t}-e^{2t}$$

وبالتالي فإن

$$f(t-2)=e^{3(t-2)}-e^{2(t-2)}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2-5s+6}\right)=u(t-2)\left(e^{3(t-2)}-e^{2(t-2)}\right)$$

وبما أن

$$u(t-a)\,f(t-a)=\begin{cases} f(t-a) & ;\quad t-a\geq 0 \\ 0 & ;\quad t-a<0 \end{cases}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2-5s+6}\right)=\begin{cases} e^{3(t-2)}-e^{2(t-2)} & ;\quad t-2\geq 0 \\ 0 & ;\quad t-2<0 \end{cases}$$

مثال 8.5 أوجد تحويل لابلاس العكسي

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-7s}}{5s+6}\right)$$

الحل المطلوب هو تحويل لابلاس العكسي للمقدار

$$\frac{e^{-7s}}{5s+6} = e^{-7s}F(s); \quad F(s) = \frac{1}{5s+6}$$

بما أن هذا المقدار يحتـوي علـى الدالـة الأسـية e^{-7s}، حيـث $a = 7$. إذاً، من القاعدة (8.4) - (8.3) نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-7s}}{5s+6}\right) = u(t-7)f(t-7)$$

حيث

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{5s+6}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\frac{6}{5}}\right) = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-\left(-\frac{6}{5}\right)}\right) = \frac{1}{5}e^{-\frac{6}{5}t}$$

إذاً

$$f(t-7) = \frac{1}{5}e^{-\frac{6}{5}(t-7)}$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-7s}}{5s+6}\right) = u(t-7)\frac{1}{5}e^{-\frac{6}{5}(t-7)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{6}{5}(t-7)} & ; \quad t-7 \geq 0 \\ 0 & ; \quad t-7 < 0 \end{cases}$$



مثال 8.6 أوجدالحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y^{(3)}-8y=\begin{cases}0 & ; \quad 0\le t<4\\ 3 & ; \quad t\ge 4\end{cases} \qquad \text{(i)}$$

بالشروط الابتدائية

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=0$$

الحل للتعامل مع مثل هذه المعادلة التفاضلية نعبر - أولاً - عن الحد غير المتجانس بدلالة دالة الخطوة الإزاحية. لنعتبر - أولاً - أن

$$g(t)=\begin{cases}0 & ; \quad 0\le t<4\\ 3 & ; \quad t\ge 4\end{cases}$$

إذاً فإن

$$g(t)=0[1-u(t-4)]+3[u(t-4)]=3[u(t-4)]$$

حيث

$$u(t-4)=\begin{cases}1 & ; \quad t\ge 4\\ 0 & ; \quad t<4\end{cases}$$

وهكذا تتحول المعادلة المعطاة إلى الشكل

$$y^{(3)}-8y=3u(t-4) \qquad \text{(ii)}$$

الآن، بتأثير تحويل لابلاس على طرفي هذه المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\mathscr{L}\left(y^{3}(t)\right)-8\mathscr{L}\left(y(t)\right)=3\mathscr{L}\left(u(t-4)\right)$$

أو

$$\left[s^{3}\mathscr{L}\left(y(t)\right)-s^{2}y(0)-s\,y'(0)-y''(0)\right]$$

$$-8\mathscr{L}\left(y(t)\right)=3\mathscr{L}\left(u(t-4)\right) \quad \text{(iii)}$$

ومن القاعدة (7.20) نجد أن

$$\mathscr{L}\left(u(t-4)\cdot 1\right)=e^{-4s}\mathscr{L}(1)=\frac{e^{-4s}}{s} \quad \text{(iv)}$$

إذاً، بالتعويض من (iv)، وبتطبيق الشروط الابتدائية المعطاة مع المعادلة (iii) نحصل على

$$s^{3}\mathscr{L}\left(y(t)\right)-8\mathscr{L}\left(y(t)\right)=\frac{3e^{-4s}}{s}$$

إذاً

$$\left(s^{3}-8\right)\mathscr{L}\left(y(t)\right)=\frac{3e^{-4s}}{s}$$

أو

$$\mathscr{L}\left(y(t)\right)=\frac{3e^{-4s}}{s\left(s^{3}-8\right)}=\frac{3e^{-4s}}{s(s-2)\left(s^{2}+2s+4\right)}$$

باستخدام مفهوم تحويل لابلاس العكسي يمكن أن نحصل على حل المسألة الابتدائية المعطاة في الشكل

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3e^{-4s}}{s(s-2)\left(s^2+2s+4\right)}\right)$$

للحصول على تحويل لابلاس العكسي هذا نستخدم ـ أولاً ـ نظرية الكسور الجزئية. بما أن

$$\frac{1}{s(s-2)\left(s^2+2s+4\right)}=\frac{-\frac{1}{8}}{s}+\frac{\frac{1}{24}}{(s-2)}+\frac{\frac{1}{12}s+\frac{1}{12}}{\left(s^2+2s+4\right)}$$

إذاً فإن

$$y(t)=3\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\left(\frac{-\frac{1}{8}}{s}+\frac{\frac{1}{24}}{s-2}+\frac{\frac{1}{12}s+\frac{1}{12}}{s^2+2s+4}\right)\right)$$

$$=\frac{-3}{8}\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s-2}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{s+1}{s^2+2s+4}\right)$$

وبما أن

$$\frac{s+1}{s^2+2s+4}=\frac{s+1}{\left((s+1)^2+3\right)}$$

إذاً فإن

$$y(t)=\frac{-3}{8}\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s-2}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right)$$

من القاعدة (8.4) - (8.3) نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s}\right)=u(t-4)f(t-4)=u(t-4)$$

حيث

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1\Rightarrow f(t-4)=1$$

كما نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{1}{s-2}\right)=u(t-4)p(t-4)=u(t-4)e^{2(t-4)}$$

حيث

$$p(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)=e^{2t}\Rightarrow p(t-4)=e^{2(t-4)}$$

وأيضاً نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right)=u(t-4)q(t-4)$$

حيث

$$q(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right)$$

لحساب هذا التحويل العكسي الأخير نستخدم القـاعدة - (8.1) (8.2) فنجد أن

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+3}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(Q(s-(-1))\right)$$

حيث

$$Q(s-(-1)) = \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+3}$$

إذاً

$$q(t) = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}(Q(s)) = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3}\right) = e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)$$

وبالتالي فإن

$$q(t-4) = e^{-(t-4)}\cos\left(\sqrt{3}\,(t-4)\right)$$

وهكذا نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-4s}\frac{s+1}{(s+1)^2+3}\right) = u(t-4)e^{-(t-4)}\cos\left(\sqrt{3}\,(t-4)\right)$$

ويكون حل المسألة الابتدائية هو

$$y(t) = \frac{-3}{8}u(t-4) + u(t-4)\frac{1}{8}e^{2(t-4)}$$
$$+\frac{1}{4}u(t-4)e^{-(t-4)}\cos\left(\sqrt{3}(t-4)\right)$$

أو

$$y(t)=\begin{cases}\frac{-3}{8}+\frac{1}{8}e^{2(t-4)}+\frac{1}{4}e^{-(t-4)}\cos\left(\sqrt{3}(t-4)\right); & t\geq 4\\ 0 & ;\ 0\leq t<4\end{cases}$$

.✍

8.5 الحصول على تحويلات لابلاس العكسية باستخدام طرق هيفيساید *(Heaviside's Methods)*

رأينا أنه عند إيجاد تحويلات لابلاس العكسية للدوال الكسرية *(Rational Functions)*، فإننا نستخدم نظرية الكسور الجزئية للتبسيط. ولكن أحياناً تكون عملية إيجاد معاملات الكسور الجزئية ليست بالمهمة السهلة. من هنا جاءت الحاجة إلى طريقة أسهل لحساب تحويلات لابلاس العكسية للدوال التي على الشكل $\frac{P(s)}{Q(s)}$، حيث الدالتان $P(s), Q(s)$، هما كثيرتا حدود بدون عوامل مشتركة، ودرجة $P(s)$ أقل من درجة $Q(s)$. هذه الطريقة تسمى **"طريقة هيفيساید"** *(Heaviside Method)*، نسبة إلى المهندس الإنجليزي أوليفر هيفيساید *(Heaviside, O, 1850 - 1925)* وهي تنقسم إلى أربع

حالات سنقدمهم بدون برهان. لنفرض أن تحويل لابلاس العكسي للدالة الكسرية $\frac{P(s)}{Q(s)}$ هو الدالة $f(t)$. أي نفرض أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = f(t)$$

والمطلوب هو معرفة مما تتكون الدالة $f(t)$. تقدم نظرية هيفيسايد أربع حالات للحصول على شكل الدالة $f(t)$ بالاعتماد على شكل المقام $Q(s)$.

الحالة الأولى

إذا احتوى المقام $Q(s)$ على عوامل من الدرجة الأولى غير مكررة.

عندئذٍ نجد أن كل عامل على الشكل $(s-a)$ من عوامل المقام $Q(s)$ يقابله في الدالة $f(t)$ حد على الشكل $\frac{P(a)}{Q'(a)}e^{at}$.

مثال 8.7

احسب

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-5}\right)$$

الحل

يمكن حل هذا المثال بأكثر من طريقة. أولاً باستخدام أشكال هيفيسايد.

إذا فرضنا أن $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-5}\right)=f(t)$، فعندئذٍ يكون المطلوب هو الحصول على الدالة $f(t)$. بما أن المقام يحتوي على العامل الوحيد $(s-5)$، والذي من الدرجة الأولى وغير المكرر، حيث $a=5$. إذاً فنحن بصدد الحالة الأولى، والتي تقول أن الدالة $f(t)$ تحتوي في مقابل العامل $(s-5)$ على المقدار الوحيد $\frac{P(5)}{Q'(5)}e^{5t}$. بما أن

$$P(s)=3,\ Q(s)=s-5,\ Q'(s)=1$$

إذاً

$$P(5)=3,\quad Q'(5)=1$$

وبالتالي فإن

$$f(t)=\frac{P(5)}{Q'(5)}e^{5t}=\frac{3}{1}e^{5t}=3e^{5t}$$

ثانياً من الجدول، نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-5}\right)=3\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-5}\right)=3e^{5t}$$

وأيضاً، باستخدام قاعدة الإزاحة في البارامتر s (قاعدة (8.1)-(8.2)) نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-5}\right)=e^{5t}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s}\right)$$

$$= 3e^{5t}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 3e^{5t}\cdot 1 = 3e^{5t}$$

✍.

الحالة الثانية

إذا كان المقام $Q(s)$ يحتوي على عوامل من الدرجة الأولى المكررة. عندئذٍ فكل عامل على الشكل $(s-a)^k$ من عوامل المقام $Q(s)$، حيث $k \geq 2$ يقابله في الدالة $f(t)$ حد على الشكل

$$\left(\frac{H^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} + \frac{H^{(k-2)}(a)}{(k-2)!}\frac{t}{1!} + \frac{H^{(k-3)}(a)}{(k-3)!}\frac{t^2}{2!} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{H'(a)}{1!}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + H(a)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)e^{at}$$

حيث يرمز $H^{(k-1)}(a)$ مثلاً إلى المشتقة من الدرجة $(k-1)$ للدالة $H(s)$ عند العدد a، كما أن

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}(s-a)^k$$

مثال 8.8 احسب

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-5)^3}\right)$$

الحل طبعاً يمكن باستخدام قاعدة الإزاحة في البارامتر s (قاعدة (8.2) -(8.1)) أن نحصل على

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-5)^3}\right)=e^{5t}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^3}\right)$$

$$=\frac{3e^{5t}}{2!}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right)=\frac{3e^{5t}}{2}t^2$$

أيضاً يمكن استخدام أشكال هيفيسايد. نفرض أن $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-5)^3}\right)=f(t)$، فيكون المطلوب هو الحصول على الدالة $f(t)$. بما أن المقام يحتوي على العامل $(s-5)^3$ وهو من الدرجة الأولى والمكرر، حيث $a=5,\ k=3$. إذاً فنحن بصدد الحالة الثانية من أشكال هيفيسايد. وبالتالي فإن

$$H(s)=\frac{3}{(s-5)^3}(s-5)^3=3$$

وعندئذٍ فإن

$$H'(s)=0\Rightarrow H'(5)=0\ ,\ H''(s)=0\ \Rightarrow\ H''(5)=0$$

وهكذا نجد أن الدالة $f(t)$ تحتوي في مقابل العامل $(s-5)^3$ على المقدار

$$\left[\frac{H''(5)}{2!}+\frac{H'(5)}{1!}\left(\frac{t}{1!}\right)+H(5)\left(\frac{t^2}{2!}\right)\right]e^{5t}$$

$$=\left[\frac{0}{2!}+\frac{0}{1!}\left(\frac{t}{1!}\right)+3\left(\frac{t^2}{2!}\right)\right]e^{5t}=\frac{3t^2}{2!}e^{5t}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-5)^3}\right)=f(t)=\frac{3t^2}{2!}e^{5t}$$

✍.

الحالة الثالثة

في هذه الحالـة فـإن المقـام $Q(s)$ يحتـوي علـى عوامـل مـن الدرجة الثانية غير المكررة. عندئذٍ فكـل عـامل علـى الشـكل $(s-a)^2+b^2$ من عوامل المقام $Q(s)$ يقابله في الدالة $f(t)$ حد على الشكل

$$\frac{1}{b}\left[\alpha_{\mathrm{Im}}\cos(bt)+\alpha_{\mathrm{Re}}\sin(bt)\right]e^{at}$$

حيث α_{Im} هو الجزء التخيلي، أما α_{Re} فهو الجزء الحقيقـي من المقدار $H(a+ib)$ حيث

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\left\{(s-a)^2+b^2\right\}$$

مثال 8.9 احسب

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2-2s+5}\right)$$

الحل باستخدام قاعدة الإزاحة في البارامتر s (قاعدة (8.2) - (8.1)) نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2-2s+5}\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-1)^2+4}\right)$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-1)^2+(2)^2}\right)=e^t\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+2^2}\right)$$

$$=\frac{3e^t}{2}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{3e^t}{2}\sin(2t)$$

باستخدام طريقة الهيفيسايد نجد أن المقام يحتوي على العامل $(s-1)^2+4$ من الدرجة الثانية غير المكرر حيث $a=1,\ b=2$. إذاً نحن في الحالة الثالثة. إذاً في مقابل العامل $(s-1)^2+4$ فإن الدالة $f(t)$ المطلوبة تحتوى على المقدار

$$\frac{1}{b}[\alpha_{\mathrm{Im}}\cos(bt)+\alpha_{\mathrm{Re}}\sin(bt)]e^{at}$$

حيث

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\left\{(s-a)^2+b^2\right\}$$

$$=\frac{3}{(s-1)^2+2^2}\left\{(s-1)^2+2^2\right\}=3$$

وبالتالي فإن

$$H(1+2i)=3 \;\rightarrow\; \alpha_{\text{Re}}=3\;;\;\; \alpha_{\text{Im}}=0$$

إذاً الدالة $f(t)$ تحتوي على المقدار

$$\frac{1}{b}\left[\alpha_{\text{Im}}\cos(bt)+\alpha_{\text{Re}}\sin bt\right]e^{at}=\frac{3e^{t}\sin(2t)}{2}$$

وهكذا نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^{2}-2s+5}\right)=f(t)=\frac{3e^{t}\sin(2t)}{2}$$

الحالة الرابعة

إذا احتوى المقام $Q(s)$ على عوامل من الدرجة الثانية المكررة. فعندئذٍ لكل عامل على الشكل $\left[(s-a)^{2}+b^{2}\right]^{2}$ من عوامل المقام يقابله في الدالة $f(t)$ حد على الشكل

$$\frac{1}{2b^{3}}(b\alpha_{\text{Im}}-\delta_{\text{Re}})e^{at}\cos(bt)+\frac{1}{2b^{3}}(b\delta_{\text{Im}}-\alpha_{\text{Re}})\times$$

$$\times e^{at}\sin(bt)+\frac{t}{2b^{3}}(\alpha_{\text{Im}}\sin(bt)-\alpha_{\text{Re}}\cos(bt))e^{at}$$

حيث α_{Im} هو الجزء التخيلى، بينما α_{Re} هو الجزء الحقيقي من المقدار $H(a+ib)$، أما δ_{Re} فهو الجزء الحقيقي، بينما δ_{Im} هو الجزء التخيلي من المقدار $H'(a+ib)$ حيث

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}\left\{(s-a)^{2}+b^{2}\right\}^{2}$$

مثال 8.10 احسب

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{\left(s^2-2s+5\right)^2}\right)$$

الحل المقام يحتوي على العامل $\left(s^2-2s+5\right)^2$ من الدرجة الثانية والمكرر مرتين. نضع ـ أولاً ـ $\left(s^2-2s+5\right)^2$ في الشكل الذي يمكنا من تطبيق الحالة الرابعة من أشكال هيفيسايد. بما أن

$$\left(s^2-2s+5\right)^2=\left((s-1)^2+4\right)^2$$

إذاً $a=1,\ b=2$. الآن نحسب المقدار

$$H(s)=\frac{3s}{\left((s-1)^2+2^2\right)^2}\left\{(s-1)^2+2^2\right\}^2=3s$$

ثم نحسب المقدارين

$$H'(a+ib),\ H(a+ib)$$

إذاً

$$H(s)=3s\to H(1+2i)=3(1+2i)=3+6i$$

وبالتالي فإن

$$\alpha_{\mathrm{Re}}=3\ ,\ \alpha_{\mathrm{Im}}=6$$

أيضاً فإن

$$H'(s) = 3 \to H'(1+2i) = 3$$

وبالتالي فإن

$$\delta_{\text{Re}} = 3\ , \quad \delta_{\text{Im}} = 0$$

وهكذا نجد أنه في مقابل العامل $\left((s-1)^2+4\right)^2$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على المقدار

$$\frac{1}{2b^3}(b\alpha_{\text{Im}} - \delta_{\text{Re}})e^{at}\cos(bt) + \frac{1}{2b^3}(b\delta_{\text{Im}} - \alpha_{\text{Re}})$$

$$\times e^{at}\sin(bt) + \frac{t}{2b^3}(\alpha_{\text{Im}}\sin(bt) - \alpha_{\text{Re}}\cos(bt))e^{at}$$

$$= \frac{1}{2(2)^3}(2(6)-3)e^t\cos(2t) + \frac{1}{2(2)^3}(-3)e^t\sin(2t)$$

$$+ \frac{t}{2(2)^3}(6\sin(2t) - 3\cos(2t))e^t = \frac{9}{16}e^t\cos(2t)$$

$$-\frac{3}{16}e^t\sin(2t) + \frac{3te^t}{8}\sin(2t) - \frac{3te^t}{16}\cos(2t)$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{\left(s^2-2s+5\right)^2}\right) = \frac{9}{16}e^t\cos(2t) - \frac{3}{16}e^t\sin(2t)$$

$$+\frac{3te^t}{8}\sin(2t) - \frac{3te^t}{16}\cos(2t)$$

مثال 8.11 احسب

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2s-5}{\left(s^2+2\right)^2(s-1)}\right)$$

الحل نستخدم أشكال هيفيسايد. الحالة الأولى بالنسبة إلى العامل $(s-1)$ والذي من الدرجة الأولى غير المكرر، والحالة الرابعة للعامل $\left(s^2+2\right)^2$ والذي من الدرجة الثانية والمكرر مرتين. أولاً بالنسبة للعامل $(s-1)$، نجد أن $a=1$ وبالتالي نحسب المقدار $\frac{P(1)}{Q'(1)}e^t$. بما أن

$$Q(s)=\left(s^2+2\right)^2(s-1)$$

إذاً فإن

$$Q'(s)=\left(s^2+2\right)\left(3s^2-4s+2\right)\rightarrow Q'(1)=3$$

أيضاً لدينا

$$P(s)=2s-5\rightarrow P(1)=-3$$

وهكذا فإن

$$\frac{P(1)}{Q'(1)}e^t=\frac{-3}{3}e^t=-e^t$$

إذاً، في مقابل العامل $(s-1)$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على المقدار $-e^t$. ثانياً بالنسبة للعامل $\left(s^2+2\right)^2$، نحسب المقدار

$$\frac{1}{2b^3}(b\alpha_{\text{Im}} - \delta_{\text{Re}})e^{at}\cos(bt) + \frac{1}{2b^3}(b\delta_{\text{Im}} - \alpha_{\text{Re}})\times$$

$$\times e^{at}\sin(bt) + \frac{t}{2b^3}(\alpha_{\text{Im}}\sin(bt) - \alpha_{\text{Re}}\cos(bt))e^{at}$$

وللحصول على القيم $a,\ b$ نضع العامل $(s^2+2)^2$ في الشكل $\left((s-0)^2+(\sqrt{2})^2\right)^2$، فنجد أن $a=0,\ b=\sqrt{2}$، ثم نحسب $H'(a+ib),\ H(a+ib)$. بما أن

$$H(s) = \frac{2s-5}{(s-1)\left\{s^2+(\sqrt{2})^2\right\}^2}\left\{s^2+(\sqrt{2})^2\right\}^2 = \frac{2s-5}{s-1}$$

إذاً فإن

$$H(a+ib) = H\left(0+i\sqrt{2}\right) = H\left(i\sqrt{2}\right) = \frac{2\left(i\sqrt{2}\right)-5}{\left(i\sqrt{2}\right)-1}$$

$$= \frac{2\left(i\sqrt{2}\right)-5}{\left(i\sqrt{2}\right)-1}\times\frac{\left(i\sqrt{2}\right)+1}{\left(i\sqrt{2}\right)+1} = \frac{-4-5-3\sqrt{2}i}{-2-1} = 3+i\sqrt{2}$$

من هذه العلاقة نجد أن

$$\alpha_{\text{Im}} = \sqrt{2}\ ,\ \alpha_{\text{Re}} = 3$$

أيضاً بما أن

$$H(s) = \frac{2s-5}{s-1} \rightarrow H'(s) = \frac{2(s-1)-(2s-5)}{(s-1)^2} = \frac{3}{(s-1)^2}$$

إذاً

$$H'(a+ib)=H'(i\sqrt{2})=\frac{3}{(i\sqrt{2}-1)^2}\times\frac{(i\sqrt{2}+1)^2}{(i\sqrt{2}+1)^2}$$

$$=\frac{3(i\sqrt{2}+1)^2}{\left[(i\sqrt{2}-1)(i\sqrt{2}+1)\right]^2}=\frac{-3+(6\sqrt{2})i}{[-3]^2}=\frac{-1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

حيث نجد أن

$$\delta_{\mathrm{Re}}=\frac{-1}{3}\ ,\quad \delta_{\mathrm{Im}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

هكذا نجد أنه في مقابل العامل $(s^2+2)^2$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على المقدار

$$\frac{1}{2b^3}(b\alpha_{\mathrm{Im}}-\delta_{\mathrm{Re}})e^{at}\cos(bt)+\frac{1}{2b^3}(b\delta_{\mathrm{Im}}-\alpha_{\mathrm{Re}})\times$$

$$\times e^{at}\sin(bt)+\frac{t}{2b^3}(\alpha_{\mathrm{Im}}\sin(bt)-\alpha_{\mathrm{Re}}\cos(bt))e^{at}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{7}{3}\cos(\sqrt{2}t)-\frac{5}{3}\sin(\sqrt{2}t)\right)$$

$$+\frac{t}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)-3\cos(\sqrt{2}t)\right)$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s-5}{\left(s^2+2\right)^2(s-1)}\right)=-e^t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{7}{3}-3t\right)\cos\left(\sqrt{2}t\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}t-\frac{5}{3}\right)\sin\left(\sqrt{2}t\right)$$

8.6 الحصول على تحويلات لابلاس العكسية باستخدام نظرية الالتفاف (Convolution Theorem)

في الباب السابع رأينا كيف يمكن إيجاد تحويل لابلاس العكسي لحاصل ضرب دالتين إحداهما الدالة الأسية e^{-as} كما في *(8.3)*. الآن نحاول إيجاد تحويل لابلاس العكسي لحاصل ضرب أي دالتين بصرف النظر عن نوعيتهما. النظرية التي تقدم طريقة إيجاد تحويل لابلاس العكسي لحاصل ضرب أي دالتين تسمى نظرية الالتفاف.

نظرية 8.1 **نظرية الالتفاف**
Convolution Theorem

إذا كان

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))=f(t),\ \ \mathcal{L}^{-1}(G(s))=g(t)$$

فإن التفاف الدالة $f(t)$ مع الدالة $g(t)$، والذي يرمز له بالرمز $f(t)*g(t)$، يعطى من العلاقة

$$f(t)*g(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right)$$

حيث

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right)=\int_{0}^{t}f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha} \tag{8.5}$$

البرهان من معطيات النظرية، لدينا

$$\mathscr{L}^{-1}\left(G(s)\right)=g(t)$$

إذاً فإن

$$G(s)=\mathscr{L}\left(g(t)\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}g(t)dt$$

بالضرب في $F(s)$ نحصل على

$$F(s)G(s)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}g(t)F(s)dt \tag{i}$$

وبما أنه من المعروف أن متغير التكامل هو متغير اختياري *(Dummy Variable)*، إذاً يمكن استبدال t بالمتغير α، مثلاً، وبالتالي فإن

$$F(s)G(s)=\int_{0}^{\infty}\left[e^{-\alpha s}F(s)\right]g(\alpha)d\alpha \tag{ii}$$

لكن، من القاعدة (7.20) لدينا

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\left[e^{-\alpha s}F(s)\right]g(\alpha)d\alpha \qquad \text{(ii)}$$

لكن، من القاعدة (7.20) لدينا

$$e^{-\alpha s}F(s)=\mathcal{L}\left(u(t-\alpha)f(t-\alpha)\right)$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}u(t-\alpha)f(t-\alpha)dt$$

أو

$$e^{-\alpha s}F(s)=\int_0^\alpha e^{-st}u(t-\alpha)f(t-\alpha)dt$$

$$+\int_\alpha^\infty e^{-st}u(t-\alpha)f(t-\alpha)dt$$

وبما أن

$$u(t-\alpha)=\begin{cases}0 & ; \quad t<\alpha\\ 1 & ; \quad t\geq\alpha\end{cases}$$

إذاً فإن

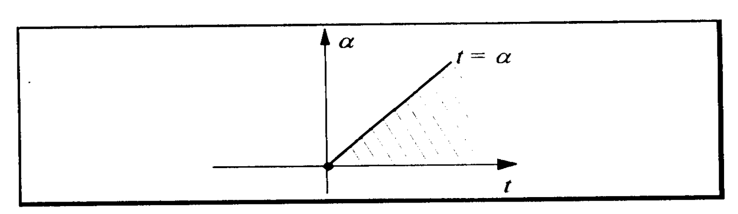
$$e^{-\alpha s}F(s)=\int_\alpha^\infty e^{-st}f(t-\alpha)dt \qquad \text{(iii)}$$

إذاً، بالتعويض عن $e^{-\alpha s}F(s)$ من المعادلة (iii) في المعادلة (ii) نحصل على

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\left[\int_\alpha^\infty e^{-st}f(t-\alpha)g(\alpha)dt\right]d\alpha$$

نلاحظ هنا أن حدود التكامل هي $\alpha \leq t < \infty$، حيث $\alpha > 0$. انظر شكل (8.1).

شكل 8.1



فإذا بدلنا ترتيب متغيرات التكامل لتصبح $d\alpha\, dt$ بدلاً من $dt\, d\alpha$، فإننا نجد من شكل (8.1) أن α تتغير من 0 إلى t بينما يتغير t من 0 إلى ∞، وهكذا نحصل على

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha\right]dt$$

أو

$$F(s)G(s) = \mathscr{L}\left(\int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha\right)$$

وهكذا نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\big(F(s)G(s)\big) = \int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha$$

✍.

خاصية هامة الالتفاف عملية إبدالية، أي أن

$$f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$$

البرهان بوضع التعويضات

$$y = t-\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{d\alpha} = -1 \quad \rightarrow \quad dy = -d\alpha$$

$$\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad y = t\ , \quad \alpha = t \quad \rightarrow \quad y = 0$$

في الالتفاف

$$f(t)*g(t) = \int_0^t [f(t-\alpha)g(\alpha)]d\alpha$$

فإنه يتحول إلى الشكل

$$f(t)*g(t) = -\int_t^0 [g(t-y)f(y)]dy$$

$$= \int_0^t [g(t-y)f(y)]dy = g(t)*f(t)$$

✍.

مثال 8.12 أوجد تحويل لابلاس العكسي

$$\mathscr{L}\text{-}1\left(\frac{1}{s(s-2)^2}\right)$$

الحل من مفهوم نظرية الالتفاف يمكن اعتبار أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-2)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)G(s)\right)=\int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)\,d\alpha$$

حيث

$$F(s)=\frac{1}{s}\ ,\quad G(s)=\frac{1}{(s-2)^2}$$

بالتالي فإن

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1\ \Rightarrow\ f(t-\alpha)=1$$

وأيضاً فإن

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}(G(s))=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}\right)=te^{2t}$$

إذاً نجد أن

$$g(\alpha)=\alpha\,e^{2\alpha}$$

هكذا نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-2)^2}\right)=\int_0^t\left(\alpha\,e^{2\alpha}\right)d\alpha=\frac{e^{2t}}{4}(2t-1)+\frac{1}{4}$$

✍.

مثال 8.13 أوجد تحويل لابلاس العكسي

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}\right)$$

الحل يمكن اعتبار أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}\right)=\int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha$$

حيث

$$F(s)=\frac{e^{-4s}}{s},\quad G(s)=\frac{1}{(s+2)}$$

إذاً

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s}\right)=u(t-4)h(t-4)=u(t-4)\cdot 1$$

وذلك لأن

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1\rightarrow h(t-4)=1$$

إذاً

$$f(t-\alpha)=u(t-\alpha-4)=u(t-(\alpha+4))$$

أو

$$f(t-\alpha)=\begin{cases}1 & ; \quad (t\geq\alpha+4)\ t-4\geq\alpha\\ 0 & ; \quad (t<\alpha+4)\ t-4<\alpha\end{cases}$$

أيضاً لدينا

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{-2t}$$

إذاً فإن

$$g(\alpha) = e^{-2\alpha}$$

وبالتالي نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-2)^2}\right) = \int_0^{t-4}(1)e^{-2\alpha}d\alpha + \int_{t-4}^{t}(0)e^{-2\alpha}d\alpha$$

$$= \int_0^{t-4} e^{-2\alpha}d\alpha = \left.\frac{-e^{-2\alpha}}{2}\right|_0^{t-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-4)}$$

ولأن هذه النتيجة هي دالة إزاحيــة فيجـب التعبـير عنهـا مـن خلال دالة الخطوة الإزاحية $u(t-4)$، وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-2)^2}\right) = u(t-4)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-4)}\right)$$

طريقة أخرى بما أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^2+2s}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{(s+1)^2-1}\right)=u(t-4)h(t-4)$$

حيث

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-(-1))^2-1}\right)=e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)$$

$$=e^{-t}\sinh(t)=e^{-t}\left(\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\right)=\frac{1-e^{-2t}}{2}$$

وبالتالي فإن

$$h(t-4)=\frac{1-e^{-2(t-4)}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2(t-4)}$$

وهكذا نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s(s+2)}\right)=u(t-4)h(t-4)=\frac{1}{2}u(t-4)\left(1-e^{-2(t-4)}\right)$$

.✍

8.7 حلول المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس

تحويلات لابلاس من الموضوعات الرياضية ذات الأهمية الكبيرة ويمكن الاستفادة منها في معالجة الكثير من المشاكل الرياضية وخصوصاً في المعادلات التكاملية والمعادلات

التفاضلية. نقدم في هذا الفصل بعض تطبيقات تحويلات لابلاس وذلك في حل المعادلات التفاضلية العادية، ذات المعاملات الثابتة وذات المعاملات المتغيرة. هذا، وتعتمد فلسفة حل المعادلات التفاضلية على التأثير — أولاً — على طرفي المعادلة التفاضلية بتحويل لابلاس. وباستخدام قواعد الحصول على تحويل لابلاس المناسبة يمكن الحصول على حل المعادلة التفاضلية واقعاً تحت تأثير تحويل لابلاس عندئذٍ يمكن باستخدام مفهوم تحويل لابلاس العكسي الحصول على الحل صراحة. سنوضح ذلك عن طريق حل بعض الأمثلة.

مثال 8.14 أوجد حل المسألة الابتدائية

$$y'' - y = 4t \ , \ y(0) = 1, \ y'(0) = 3$$

الحل بالتأثير بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\mathscr{L}(y'' - y) = \mathscr{L}(4t) \to \mathscr{L}(y'') - \mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(4t)$$

أو

$$s^2\mathscr{L}(y) - sy(0) - y'(0) - \mathscr{L}(y) = \frac{4}{s^2}$$

إذاً

$$(s^2 - 1)\mathscr{L}(y) = \frac{4}{s^2} + (s + 3)$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}(y) = \frac{4}{s^2(s^2-1)} + \frac{(s+3)}{(s^2-1)}$$

ويكون حل المسألة الابتدائية هو

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s^2-1)} + \frac{(s+3)}{(s^2-1)}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s^2-1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2-1}\right)$$

باستخدام نظرية الالتفاف نجد - أولاً - أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s^2-1)}\right) = \int_0^t f(t-\alpha)g(\alpha)d\alpha$$

حيث

$$F(s) = \frac{4}{s^2} \rightarrow f(t) = 4t \rightarrow f(t-\alpha) = 4(t-\alpha);$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2-1} \rightarrow g(t) = \sinh(t) \rightarrow g(\alpha) = \sinh(\alpha)$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s^2-1)}\right) = \int_0^t 4(t-\alpha)\sinh(\alpha)d\alpha$$

باستخدام التكامل بالتجزيء، نضع

$$u = 4(t-\alpha) \quad , \quad dv = \sinh(\alpha)d\alpha$$

$$du = -4d\alpha \quad , \quad v = \cosh(\alpha)$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2(s^2-1)}\right) = 4(t-\alpha)\cosh(\alpha)\Big|_0^t + 4\sinh(\alpha)\Big|_0^t$$

$$= -4t + 4\sinh(t)$$

ثانياً نوجد

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2-1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2-1}\right)$$

$$= \cosh(t) + 3\sinh(t)$$

وهكذا نجد أن

$$y(t) = -4t + 4\sinh(t) + \cosh(t) + 3\sinh(t)$$

$$= -4t + 7\sinh(t) + \cosh(t)$$

.✍

مثال 8.15 أوجد حل المسألة الابتدائية

$$y'' + 2ty' - 4y = 2; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

الحل بالتأثير بتحويل لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\mathscr{L}(y'') + 2\mathscr{L}(ty') - 4\mathscr{L}(y) = \mathscr{L}(2) = \frac{2}{s}$$

باستخدام القاعدة (7.2) نجد أن

$$\mathscr{L}(y'') = s^2\mathscr{L}(y(t)) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

باستخدام القاعدة (7.5) نجد أن

$$\mathscr{L}(ty') = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}(y'(t)) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0))$$

$$= -\frac{d}{ds}(sY(s)) = -sY'(s) - Y(s)$$

وهكذا تتحول المعادلة المعطاة إلى

$$s^2Y(s) + 2(-sY'(s) - Y(s)) - 4Y(s) = \frac{2}{s}$$

أو

$$(s^2 - 6)Y(s) - 2sY'(s) = \frac{2}{s}$$

وهذه الأخيرة تأخذ شكل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right)Y(s) = \frac{-1}{s^2}$$

العامل التكاملي (1.29) يعطي

$$\mu(s) = e^{\int\left(\frac{3}{s}-\frac{s}{2}\right)ds} = e^{\ln(s^3)-\frac{s^2}{4}} = s^3 e^{\frac{-s^2}{4}}$$

إذاً الحل العام (1.31) يأخذ الشكل

$$Y(s) = \frac{-e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}\int s e^{\frac{-s^2}{4}} ds + \frac{Ce^{\frac{s^2}{4}}}{s^3} = \frac{2e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}\int \frac{-s}{2} e^{\frac{-s^2}{4}} ds$$

$$+\frac{Ce^{\frac{s^2}{4}}}{s^3} = \frac{2e^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}\cdot e^{\frac{-s^2}{4}} + \frac{Ce^{\frac{s^2}{4}}}{s^3} = \frac{2}{s^3} + \frac{Ce^{\frac{s^2}{4}}}{s^3}$$

نلاحظ هنا أنه إذا كان $C \neq 0$ فإن $\lim_{s\to\infty} Y(s) \to \infty$ ، الأمر الذي يعني التضاد مع مفهوم تحويل لابلاس التقاربي. إذاً يجب اختيار الثابت C مساوياً للصفر. بوضع $C = 0$ نحصل على

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow y(t) = \mathscr{L}^{-1}(Y(s)) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = t^2$$

الآن يمكنك التأكد باستخدام الطرق التقليدية أن $y(t) = t^2$ هو حل للمسألة الابتدائية المعطاة.

✍.

8.8 مسائل

أوجد تحويلات لابلاس العكسية للدوال الآتية باستخدام أكثر من قاعدة أو طريقة كلما أمكنك ذلك.

(1) $\dfrac{1}{s^2-4s+3}$

(2) $\dfrac{s-2}{s^2-19}$

(3) $\dfrac{2s}{s^2-4}$

(4) $\dfrac{s^3-2}{s^2-4s+19}$

(5) $\dfrac{s-3}{(s-3)^2+9}$

(6) $\dfrac{s^2}{s^2-4s+19}$

(7) $\dfrac{4}{s^2+9}-\dfrac{1}{(s-3)^2}$

(8) $\dfrac{s}{s^2-4s+19}$

(9) $\dfrac{4}{s^2-s-2}$

(10) $\dfrac{4}{s^2+s+2}$

(11) $\dfrac{s-3}{(s-2)^2+2(s-2)+1}$

(12) $\dfrac{s-5}{(s-2)^2+2(s-2)+5}$

(13) $\dfrac{s^2+1}{(s-1)(s^2+2)}$

(14) $\dfrac{s^3+1}{(s-1)(s^2+2)}$

(15) $\dfrac{e^{-4s}}{s+2}$

(16) $\dfrac{e^{-2s}}{s+4}$

(17) $e^{-2s}\left(\dfrac{s+2}{s^2-4s+8}\right)$

(18) $e^{-2s}\left(\dfrac{s}{s^2-4s+8}\right)$

(19) $e^{-5s}\left(\dfrac{2s+1}{s^2-3s+5}\right)$

(20) $e^{-s}\left(\dfrac{s+1}{s^2-3s+5}\right)$

(21) $\dfrac{2s-4}{(s-1)^4}$

(22) $\dfrac{s-4}{(s+2)^4}$

(23) $\dfrac{(-3s+2)e^{-2s}}{s^2-2s+6}$

(24) $\dfrac{(3s+4)e^{-4s}}{s^2-2s+6}$

(25) $\dfrac{2s^2+3s-4}{(s-3)(s^2+4)^2}$

(26) $\dfrac{2s^2+3s-4}{(s-3)(s^2+4)}$

(27) $\dfrac{e^{-5s}}{s(s^2+9)}$

(28) $\dfrac{e^{-5s}}{s(s^2-9)}$

(29) $\dfrac{s-2}{s^2-4s+19}$

(30) $\dfrac{s+2}{s^2-4s+19}$

(31) $\dfrac{8s^3-3s+2}{s^4-3s^3-20s^2+84s-80}$

(32) $\dfrac{s^3-3s+2}{s^4-3s^3-20s^2+84s-80}$

أوجد تحويلات لابلاس العكسية للدوال الآتية باستخدام قواعد هيفيسايد (يمكنك الحل بطريقة أخرى ومقارنة النتائج).

(33) $\dfrac{s-3}{(s^2+4)(s+7)}$

(34) $\dfrac{s-3}{(s^2+4)(s+7)}$

(35) $\dfrac{3s-4}{(s-1)(s+2)^2}$

(36) $\dfrac{s}{(s^2+4)(s+7)}$

(37) $\dfrac{-3s-2}{(s+4)^2}$

(38) $\dfrac{s-3}{(s^2+4)^2(s+1)}$

(39) $\dfrac{-s}{(s-4)^2(s-5)}$ (40) $\dfrac{s^2-3}{(s-4)(s^2+7)}$

(41) $\dfrac{s^3}{(s+3)^2(s+2)^2}$ (42) $\dfrac{(s-3)^2}{(s^2+4)(s+7)^2}$

(43) $\dfrac{4}{(s-2)^2(s+6)}$ (44) $\dfrac{10s^2-3s}{(s^2-4)}$

(45) $\dfrac{-2s^2}{(s-3)^2(s+2)}$ (46) $\dfrac{-4s^5}{(s-5)(s+7)}$

(47) $\dfrac{4s^2+5}{(s+3)(s^2+3s+7)}$ (48) $\dfrac{-4s^5}{(s-5)(s^2+s+7)}$

أوجد حلول المسائل الأبتدائية الآتية باستخدام مفاهيم تحويلات لابلاس وتحويلات لابلاس العكسية. قارن مع الحلول التي يمكن الحصول عليها بطرق أخرى كلما أمكن ذلك.

(49) $y''-6y'+2y=0\ ;\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=-3$

(50) $y''+2y'+y=t^2e^{-4t}-1;\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=-2$

(51) $y''-3y'-10y=e^{-t};\ \ y(0)=2\ ,\ \ y'(0)=-4$

(52) $y''+5y'+6y=f(t);\quad y(0)=y'(0)=0$

$$f(t)=\begin{cases}-2\ , & 0\le t<3\\ 0\ , & t\ge 3\end{cases}$$

(53) $y''+6y'-18y=e^{-4t}\ ;\ \ y(0)=-3,\ \ y'(0)=2$

(54) $y^{(3)}+8y=\sin(2t);\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=y''(0)=0$

(55) $y'' + 2y' - 7y = 8; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(56) $y'' - 4y' + 4y = f(t); \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1;$

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 3 \\ t+2, & t \ge 3 \end{cases}$$

(57) $y'' + 8y' - 2y = 1; \ y(0) = 1, \ y'(0) = -2$

(58) $y^{(4)} - 10y'' + 24y = 4 \ ;$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \ y^{(3)}(0) = 2$$

(59) $y^{(3)} - 3y'' + 4y' - 16y = 2u(t-3);$

$$y(0) = y'(0) = -1, \ y''(0) = 0$$

(60) $y'' - 2y' - y = \cosh(t); \quad y(0) = y'(0) = 0$

(61) $y^{(4)} + 12y^{(3)} - 2y = 1 \ ;$

$$y(0) = -4, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = y^{(3)} = 0$$

(62) $y'' - 2y' + y = \cos(t); \ y(0) = y'(0) = 0$

(63) $y'' - 2y' + y = t; \ y(0) = y'(0) = 0$

****

الباب
9

الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية باستخدام متسلسلات القوى

Approximate Solutions of Differential Equations Using Power Series

إن حل أية مسألة رياضية مهما كانت يمكن أن يكون واحدا من ثلاثة أنواع من الحلول. النوع الأول يسمى **"الحلول التحليلية"** *(Analytic Solutions)* أو الحلول المضبوطة *(Exact Solutions)* وهي تلك الحلول الفعلية والتي يكون لها شكل رياضي مغلق *(Closed Form)* أي لها شكل صريح ويمكن الحصول عليها بطرق التحليل الرياضي المعروفة وعادة مايكون مقدار الخطأ *(Error)* فيها صفراً. النوع الثاني يسمى **"الحلول التقريبية"** *(Approximate Solution)* وتستخدم فيها الطرق التقريبية وهذه الطرق تعطي حلولا تكون قريبة *(Close to)* من الحلول المضبوطة، بحيث يقترب مقدار الخطأ فيها إلى الصفر طالما كانت الطريقة المستخدمة مناسبة للمسألة التي يراد حلها، وهذا هو موضوع هذا الباب. أما النوع الثالث فيسمى **"الحلول العددية"** *(Numerical Solutions)* وهي – أيضاً – حلول تقريبية، ولكننا نحصل عليها عند نقط معينة في مجال تعريف المسألة.

هذه النقط كان قد تم تحديدها مسبقاً، بمعنى أنه لايمكن معرفة الحل عند أية نقطة أخرى لم يتم تحديدها مسبقاً. بالنسبة إلى الحلول العددية فيمكن الحصول عليها بطرق كثيرة مثل طريقة أويلر، أو طريقة أويلر المتطورة، أو طريقة رانج - كوتة *(Runge-Kutta Method)* كما سنرى في الباب القادم.

9.1 مقدمة

في هذا الباب نقدم طريقة تقريبية للحصول على الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية العادية. هذه الطريقة تسمى "**طريقة متسلسلات القوى**" *(Power Series Method)*. إذ أنها تفرض الحلول على شكل متسلسلات القوى، ولهذا فالحلول الناتجة باستخدام هذه الطريقة تسمى بالتأكيد "**حلول متسلسلات القوى**" *(Power Series Solutions)*.

فباستخدام طريقة متسلسلات القوى يمكن الحصول على حل متسلسلات القوى للمعادلة $F(x, y, y', y'') = 0$، مثلاً في الشكل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. بعد ذلك نجري عملية التفاضل

على هذا الحل، ثم نعوض بـه فـي المعادلـة الأصليـة. وهكـذا يمكن الحصول على المعاملات المجهولة، a_n.

نتعرض ـ أيضاً ـ فـي هذا البـاب لمفـاهيم مـا يسـمى النقـط العادية *(Ordinary Points)* والنقط الشاذة *(Singular Points)* للمعادلات التفاضلية، لما في ذلك من أهمية كبيرة في تحديـد مراكز متسلسلات القوى المعبرة عن الحلول المطلوبة.

هذا، وسوف نتعرض لطريقة إيجاد حلول متسلسـلات القـوى للمعادلات التفاضلية حول النقط العادية. وسوف نقدم ـ أيضاً ـ طريقة إيجاد حلول متسلسلات القـوى حـول النقـط الشـاذة المنتظمة وهي الطريقة المسماة بطريقة فروبينياس.

وتعتمد هذه الطريقة على فرض الحل المطلوب علـى صـورة حـل فروبينيـاس *(Frobenius Solution)* والـذي يـأخذ شـكل متسلسلة قوى مركزها النقطة الشاذة المنتظمة. بعد ذلك يبدأ البحث عن جذور ما يسـمى بالمعادلـة المميـزة أو **"معادلـة التعريـف"** *(Indicial Equation)* حيـث يتـم تحديـد الشـكل النهائي للحل بناءً على شكل جذور "معادلة التعريف".

لكـن.. قبـل البـدء فـي شـرح طريقـة متسلسـلات القـوى وتطبيقاتها إليك يا صديقي بعض التعريفات والمفاهيم الهامـة التي تفيد فـي فهم هـذا الموضـوع مثـل متسلسـلات القـوى،

وتقاربها، وتباعدها، وما يسمى بنصف قطر التقارب، وما يسمى بمركز المتسلسلة.

تعريف 9.1 **متسلسلة القوى**
Power Series

تُعَرف متسلسلة القوى وأحياناً يقال لها متسلسلة تايلور *(Taylor Series)* على أنها المتسلسلة التي تأخذ الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ، حيث $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ تسمى معاملات المتسلسلة، بينما يسمى x_0 أساس أو مركز المتسلسلة *(Center of the Series)*.

فإذا كان $x_0 = 0$ فإن هذه المتسلسلة تصبح على الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وتسمى عندئذٍ **"متسلسلة ماكلورين"** *(Maclourin Series)*.

ولأننا بصدد الحصول على حل المعادلات التفاضلية على شكل متسلسلات القوى فمن الضروري معرفة ما إذا كانت هذه المتسلسلات تقاربية *(Convergent)* أم تباعدية *(Divergent)*. في الواقع فإنه إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة

قوى فإنه توجد لدينا ثلاث حالات بالنسبة لتقارب هذه المتسلسلة.

(1) المتسلسلة تكون متسلسلة تقاربية فقط إذا كان $x=0$.

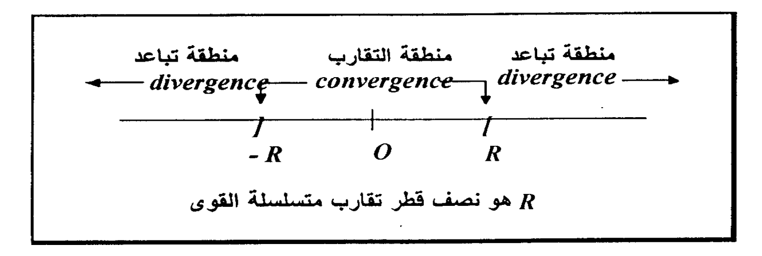
(2) المتسلسلة تقاربية لكل قيم x بما فيها $x=0$.

(3) المتسلسلة تقاربية لكل قيم x التي تحقق الشرط $|x|<R$. وتباعدية لكل قيم x التي تحقق الشرط $|x|>R$. حيث R هو نصف قطر التقارب *(Radius of Convergence)* للمتسلسلة ويعرف على أنه

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|},\quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

بشرط أن يكون لهذه النهايات وجود. الفترة المفتوحة $]-R,R[$ تسمى فترة تقارب المتسلسلة. يمكن أن نعبر عن مناطق تقارب وتباعد متسلسلة القوى في شكل (9.1).

شكل 9.1



هذا، وإليك الآن بعض العمليات على متسلسلات القوى *(Operation with Power Series)*.

(1) جمع متسلسلتين تقاربيتين يعطي متسلسلة تقاربية أيضاً.

(2) ضرب متسلسلة تقاربية في كمية قياسية يعطي متسلسلة تقاربية أيضاً.

(3) تفاضل المتسلسلة التقاربية يعطي متسلسلة تقاربية لها نفس نصف قطر التقارب. طبعاً عملية التفاضل تتم بتفاضل الحد الأول ثم الثاني وهكذا. لاحظ أن

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}; \tag{9.1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{9.2}$$

(4) تكامل المتسلسلة التقاربية يعطي متسلسلة تقاربية لها نفس نصف قطر التقارب، طبعاً عملية التكامل تتم بتكامل الحد الأول ثم الثاني وهكذا. لاحظ أن

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C \tag{9.3}$$

تعريف 9.2 **الدالة التحليلية**
Analytic Function

ُيقال أن الدالة $f(x)$ دالة تحليلية *(Analytic Function)* عند النقطة x_0، إذا أمكن تمثيلها على شكل متسلسلة قوى مركزها النقطة x_0 على الفترة المفتوحة $]-R,R[$. في هذه الحالة فإن $f(x)$ تأخذ الشكل

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{9.4}$$

هذا، ويجب التنويه إلى أنه في مجال *(Domain)* تعريف المعادلات التفاضلية (فترة تعريف المتغير المستقل) توجد بعض النقط التي تسمى نقطاً عادية للمعادلة والبعض الآخر يسمى نقطاً شاذة.

النقط الشاذة نفسها تنقسم إلى نوعين. النوع الأول يسمى **"النقط الشاذه المنتظمة"** *(Regular Singular Points)*، والنوع الثانى يسمى **"النقط الشاذة غير المنتظمة"** *(Irregular Singular Points)*. لتوضيح هذه المفاهيم، اعتبر المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ومن الدرجة الأولى

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{9.5}$$

حيث $P(x),\ Q(x),\ R(x)$ هي دوال متصلة على فترة معينة، I تحتوي على النقطة x_0. لنفرض أننا نبحث عن حل لهذه المعادلة التفاضلية بحيث يكون على شكل متسلسلة قوى مركزها النقطة x_0. إذاً لدينا احتمالان بالنسبة للنقطة x_0 حتى يمكن استخدامها مركز للمتسلسلة حيث يجب أن تكون إما نقطة عادية أو نقطة شاذة منتظمة.

تعريف 9.3 **النقط العادية و النقط الشاذة للمعادلات التفاضلية**

النقطة x_0 تكون "**نقطة عادية**" للمعادلة التفاضلية إذا كان $P(x_0) \neq 0$. وتكون "**نقطة شاذة**" إذا كان $P(x_0) = 0$. فإذا كانت النقطة x_0 نقطة شاذة، وكانت الدالتان $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$، تحليليتين بحيث يكون

$$\varphi_1(x) = (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}, \quad \varphi_2(x) = (x - x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)} \tag{9.6}$$

فإن النقطة x_0 تكون "**نقطة شاذة منتظمة**". فإذا لم تكن الدالتان $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ تحليليتين فإن x_0 تسمى "**نقطة شاذة غير منتظمة**".

.✍

مثال 9.1 ابحث عن النقط العادية والنقط الشاذة للمعادلات التفاضلية

(1) $x^2y'' + axy' + by = 0$

(2) $2(x-2)^2xy'' + 3xy' + (x-2)y = 0$

(3) $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$

الحل (1) بمقارنة المعادلة (1) مع الصورة (9.5) نجد أن

$$P(x) = x^2,\ Q(x) = ax,\ R(x) = b$$

ويما أن

$$P(x) = x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

إذاً $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة. الآن نبحث عما إذا كانت $x_0 = 0$ نقطة شاذة منتظمة أم غير منتظمة. بما أن

$$\varphi_1(x) = (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = x\left(\frac{ax}{x^2}\right) = a$$

وأيضاً

$$\varphi_2(x) = (x-x_0)^2\left(\frac{R(x)}{P(x)}\right) = x^2\left(\frac{b}{x^2}\right) = b$$

إذاً فإن $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ دالتان تحليليتان، بمعنى أنهما محدودتان عندما $x = 0$ (لاحظ أن $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)$ محدودتان ليس فقط عندما $x = 0$ ولكن لجميع قيم x). وبالتالي فإن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة.

(2) بمقارنة المعادلة (2) بالصورة (9.5) نجد أن

$$P(x) = 2(x-2)^2 x, \quad Q(x) = 3x, \quad R(x) = x-2$$

وبما أن

$$P(x) = 2(x-2)^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ , \ x = 2$$

إذاً $x_0 = 0, x_0 = 2$ هي نقط شاذة للمعادلة (2). الآن نبحث عما إذا كانت هذه النقط شاذة منتظمة أم غير منتظمة. بالنسبة إلى النقطة $x_0 = 0$، بما أن

$$\varphi_1(x) = (x-0)\frac{3x}{2(x-2)^2 x} = \frac{3x}{2(x-2)^2}$$

وأيضاً

$$\varphi_2(x) = (x-0)^2 \frac{x-2}{2(x-2)^2 x} = \frac{x(x-2)}{2(x-2)^2} = \frac{x}{2(x-2)}$$

إذاً فإن $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ دالتان تحليليتان، بمعنى أنهما محدودتان. وبكلمات أخرى فإن هذا يعني أنه إذا تم التعويض عن $x = 0$ في كل من $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ فالناتج هو قيم محدودة وليس مالانهاية. إذاً النقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة. بالنسبة إلى النقطة $x_0 = 2$، بما أن

$$\varphi_1(x) = (x-2)\frac{3x}{2(x-2)^2 x} = \frac{3}{2(x-2)}$$

وبما أن

$$\varphi_2(x) = (x-2)^2 \frac{(x-2)}{2(x-2)^2 x} = \frac{x-2}{2x}$$

إذاً فإن الدالة $\varphi_1(x)$ ليست دالة تحليلية. بمعنى أنه إذا تم التعويض عن $x = 2$ في $\varphi_1(x)$ فالناتج هو مالانهاية وليس كمية محدودة. إذاً النقطة $x = 2$ هي نقطة شاذة غير منتظمة، بغض النظر عن كون $\varphi_2(x)$ دالة تحليلية.

(3) بمقارنة المعادلة (3) بالصورة (9.5) نجد أن

$$P(x) = \left(1-x^2\right), \quad Q(x) = -2x, \quad R(x) = \lambda(\lambda+1)$$

بما أن $P(x) = 0$ فقط عندما $\left(1-x^2\right) = 0$ أو عندما $x = \pm 1$، إذاً فإن $x_0 = 1,\ x_0 = -1$ هي نقط شاذة للمعادلة (3). الآن نبحث عما إذا كانت هذه النقط شاذة منتظمة أم غير منتظمة. بالنسبة إلى النقطة $x_0 = +1$، بما أن

$$\varphi_1(x) = (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = (x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x+1}$$

وبما أن

$$\varphi_2(x) = (x-1)^2 \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} = (1-x)\frac{\lambda(\lambda+1)}{x+1}$$

إذاً فإن $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ دالتان تحليليتان. وبالتالي فإن النقطة $x = 1$ هي نقطة شاذة منتظمة. بالنسبة إلى النقطة $x_0 = -1$، بما أن

$$\varphi_1(x) = (x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = (x+1)\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x-1}$$

وبما أن

$$\varphi_2(x) = (x+1)^2 \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} = (1+x)\frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x}$$

إذاً فإن $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ دالتان تحليليتان. وبالتالي فإن النقطة $x_0 = -1$ هي نقطة شاذة منتظمة أيضاً.

9.2 حلول متسلسلات القوى حول النقط العادية
Power Series Solution Near an Ordinary Point

لنفرض أن x_0 هي نقطة عادية في مجال تعريف معادلة تفاضلية معينه، وأن المطلوب هو إيجاد حل تقريبي لهذه المعادلة على شكل متسلسلة قوى حول النقطة x_0 بحيث

تكون هذه المتسلسلة تقاربية في الفترة $|x - x_0| < \delta$. في هذه الحالة نفرض الحل على الشكل

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{9.7}$$

وفلسفة هذه الطريقة تعتمد على التعويض بهذا الحل ومشتقاته في المعادلة المعطاة فنحصل على معادلة كل حدودها متسلسلات. وباستخدام بعض الأساليب الرياضية يمكن جمع هذه المتسلسلات، وبمقارنة معاملات قوى x المختلفة في طرفي المعادلة يمكن الحصول على المعاملات a_n، ثم التعويض مرة أخرى بهذه المعاملات في الحل المفروض نحصل عليه في شكله النهائي.

النظريات التالية تبين شروط وجود حلول متسلسلات القوى للمعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى والرتبة الثانية.

نظرية 9.4 نفرض المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

$$y' + R(x)y = F(x) \tag{9.8}$$

إذا كانت الدوال $F(x), R(x)$ هي دوال تحليلية عند النقطة x_0، إذاً أي حل لهذه المعادلة هو ـ أيضاً ـ دالة تحليلية، وبالتالي يمكن الحصول عليه على شكل متسلسلة قوى حول x_0.

✍.

نظرية 9.5 نفرض المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية

$$y'' + Q(x)y' + R(x)y = F(x) \tag{9.9}$$

إذا كانت الدوال $F(x), Q(x), R(x)$ دوال تحليلية عند النقطة x_0 فإن أي حل لهذه المعادلة هو ـ أيضاً ـ دالة تحليلية، وبالتالي يمكن الحصول عليه على شكل متسلسلة قوى حول x_0.

✍.

مثال 9.2 أوجد حل متسلسلات القوى للمعادلة التفاضلية $y' + ky = 0$ حيث k مقدار ثابت.

الحل يجب أن نختار ـ أولاً ـ مركز المتسلسلة. بما أن

$$F(x) = 0, \ R(x) = k$$

دوال تحليلية عند النقطة 0. إذاً فإن $x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية المعطاة، إذاً يمكن فرض الحل على الشكل

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{i}$$

ويكون المطلوب الآن هو معرفة جميع قيم المعاملات a_n.
بالتفاضل مرة واحدة نجد أن المشتقة الأولى للحل هي

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{ii}$$

بالتعويض من (i), (ii) عن y, y' في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n = 0 \tag{iii}$$

لجعل كل حدود المعادلة (iii) حدوداً في قوى x^n، نضع في المتسلسلة الأولى من جهة اليسار $n+1$ بدلاً من n، فنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}+ka_n\right]x^n=0 \qquad \text{(iv)}$$

وبمساواة معاملات x^n في (iv) بالصفر نحصل على الصورة الاختزالية *(Recurrence Formula)* للمعاملات في الشكل

$$(n+1)a_{n+1}+ka_n=0 \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots \qquad \text{(v)}$$

أو

$$a_{n+1}=\frac{-ka_n}{n+1}; \quad n=0,1,2,\ldots \qquad \text{(vi)}$$

الآن، وبالتعويض عن $n=0,1,2,\ldots$ على التوالي في الصورة الاختزالية (vi) نحصل على

$$a_1=-ka_0,\ a_2=-k\left(\frac{a_1}{2}\right)=\frac{k^2a_0}{2};$$

$$a_3=\frac{-k^3a_0}{2\cdot 3},\ a_4=\frac{k^4a_0}{2\cdot 3\cdot 4}\ ,\ldots$$

وبالاستمرار في التعويض عن قيم n، في الصورة الاختزالية (vi) نحصل على الشكل العام أو الشكل النوني للمعاملات a_n، إذ نجده

$$a_n=\frac{(-1)^n k^n a_0}{n!}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

بالتعويض عن a_n في الحل المفروض (i)، نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kx)^n}{n!}$$

وبما أنه من المعروف أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kx)^n}{n!} = e^{-kx}$$

إذاً نرى أن الحل العام الذى حصلنا عليه ما هو في الحقيقة إلا $y(x) = a_0 e^{-kx}$.

مثال 9.3 أوجد حل متسلسلات القوى للمعادلة التفاضلية $y'' + k^2 y = 0$، حيث k^2 مقدار ثابت.

الحل يجب أن نختار أولاً مركز المتسلسلة. بما أن

$$F(x) = 0, \ Q(x) = 0, \ R(x) = k^2$$

دوال تحليلية عند $x_0 = 0$. إذاً فإن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية المعطاة، إذاً يمكن فرض الحل على الشكل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. بالتفاضل نجد أن

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بالتعويض عن الكميات y, y', y'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^n = 0$$

لكي نجعل كل حدود هذه المعادلة حدوداً في قوى x^n، نضع في المتسلسلة الأولى من جهة اليسار $n+2$ بدلاً من n، فنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + k^2 a_n \right] x^n = 0$$

بمساواة معاملات x^n بالصفر نحصل على الصورة الاختزالية التالية

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + k^2 a_n = 0 \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

أو

$$a_{n+2} = \frac{-k^2 a_n}{(n+2)(n+1)} \ ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

وبالتعويض عن $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ بالترتيب في الصورة الاختزالية يمكن أن نحصل على

$$a_2 = \frac{-k^2 a_0}{2 \cdot 1}, \quad a_3 = \frac{-k^2 a_1}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = \frac{-k^2 a_2}{4 \cdot 3} = \frac{k^4 a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_5 = \frac{-k^2 a_3}{5 \cdot 4} = \frac{k^4 a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, \; a_6 = \frac{-k^2 a_4}{6 \cdot 5} = \frac{-k^6 a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \ldots$$

وبالاستمرار في التعويض عن قيم n، في الصورة الاختزالية نحصل على الشكل العام أو الشكل النوني للمعاملات a_n، بحيث نجد أنه إذا كانت n فردية *(Odd)* فإن المعاملات a_n تعتمد على المعامل a_1 وتأخذ الشكل

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n (k)^{2n}}{(2n+1)!} a_1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

وإذا كانت n زوجية *(Even)* فإن المعاملات a_n تعتمد على المعامل a_0 وتأخذ الشكل

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n (k)^{2n}}{(2n)!} a_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

الآن وقبل التعويض عن كل المعاملات a_n الفردية والزوجية في الحل المفروض، نحاول وضع الحل على شكل حاصل

جمع متسلسلتين،الأولى زوجية والثانية فردية. وبالتالي فـإن الحل العام للمعادلة المعطاة يأخذ الشكل

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kx)^{2n}}{(2n)!}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(k)^{2n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kx)^{2n}}{(2n)!}+\frac{a_1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وبما أنه من المعروف أن

$$\cos(kx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kx)^{2n}}{(2n)!}\ ;$$

$$\sin(kx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(kx)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

إذاً نجد أن الحل العام هو

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0\cos(kx)+\frac{a_1}{k}\sin(kx)$$

.✍

مثال 9.4 أوجد حل متسلسلات القوى حول النقطة $x_0 = 0$ لمعادلة ليجندر التفاضلية (*Legendre Differential Equation*)

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0; \quad \lambda - \text{Constant}$$

الحل نضع – أولاً – المعادلة على الشكل

$$y'' - \frac{2x}{\left(1-x^2\right)}y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{\left(1-x^2\right)}y = 0$$

بما أن

$$Q(x) = -\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}, \quad R(x) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\left(1-x^2\right)}, \quad F(x) = 0$$

دوال تحليلية عند النقطة $x_0 = 0$. إذاً فإن $x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية المعطاة. أيضاً نجد من المعادلة المعطاة أن

$$P(x) = \left(1-x^2\right) \Rightarrow P(0) = \left(1-0^2\right) = 1 \neq 0$$

الأمر الذي يؤكد أن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية المعطاة. الآن يمكننا فرض الحل على الشكل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. بالتفاضل نجد أن

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

وبالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة المعطاة نحصل على المعادلة

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

أو

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

ولجعل كل حدود المعادلة السابقة حدوداً في قوى x^n، نضع في المتسلسلة الأولى من جهة اليسار $n+2$ بدلاً من n، فنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}-n(n-1)a_nx^n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}-2na_nx^n+\lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

ولجعل كل المتسلسلات تبدأ من $n=2$ يتم فك المتسلسلات الأولى، والثالثة، والرابعة، حتى تبدأ حدودها من $n=2$ مثل المتسلسلة الثانية، وذلك حتى يتثنى لنا عملية جمع المتسلسلات. إذاً

$$2a_2+6a_3x-2a_1x+\lambda(\lambda+1)a_0+\lambda(\lambda+1)a_1x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}-n(n-1)a_nx^n$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}-2na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}\lambda(\lambda+1)a_nx^n=0$$

أو

$$[2a_2+\lambda(\lambda+1)a_0]+[6a_3-2a_1+\lambda(\lambda+1)a_1]x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+\left(\lambda(\lambda+1)-n(n+1)\right)a_n\right)x^n=0$$

وبمساواة معاملات قوى x^0,x^1,x^n في المعادلة الأخيرة بالصفر نحصل ـ بالترتيب ـ على

$$2a_2+\lambda(\lambda+1)a_0=0\ \Rightarrow\ a_2=\frac{-\lambda(\lambda+1)}{2}a_0$$

$$[\lambda(\lambda+1)-2]a_1+6a_3=0\ \Rightarrow\ a_3=\frac{2-\lambda(\lambda+1)}{6}a_1$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left(n(n+1)-\lambda(\lambda+1)\right)a_n=0$$

حيث يمكن أن نحصل من المعادلة الأخيرة على الصورة الاختزالية التالية

$$\boxed{a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\lambda(\lambda+1)}{(n+2)(n+1)}a_n,\quad n=2,3,\ldots}$$

الآن بإطلاق n ليأخذ القيم $n=2,3,4,\ldots$ بالترتيب في الصورة الاختزالية يمكن أن نحصل على بقية المعاملات، بحيث نجد أنه إذا كانت n فردية فإن المعاملات تعتمد على المعامل a_1، وإذا كانت n زوجية فإن المعاملات تعتمد على المعامل a_0.

وبما أنه من نظرية المعادلات التفاضلية نعلم أن المعادلة من الرتبة الثانية تحتوي على حلين مستقلين أو غير مرتبطين خطياً وأن عدد الثوابت الاختيارية في الحل يساوي رتبة المعادلة التفاضلية.

إذاً المعاملان a_0,a_1 يأخذان قيماً اختيارية. وهكذا نجد أن الحل العام لمعادلة ليجندر التفاضلية هو

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

$$=a_0+a_2x^2+a_4x^4+a_6x^6+\ldots+a_1x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots$$

بالتعويض عن المعاملات $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ نجد أن

$$y(x) = a_0\left\{1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}x^2 + \frac{6-\lambda(\lambda+1)}{12} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{-\lambda(\lambda+1)}{2}x^4 + \cdots\right\} + a_1\left\{x + \frac{2-\lambda(\lambda+1)}{6}x^3\right.$$

$$\left. + \frac{12-\lambda(\lambda+1)}{20} \times \frac{2-\lambda(\lambda+1)}{6}x^5 + \ldots\right\}$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها في الشكل

$$y(x) = a_0 F(x) + a_1 G(x)$$

حيث

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}x^2 + \frac{6-\lambda(\lambda+1)}{12} \times \frac{-\lambda(\lambda+1)}{2}x^4 + \ldots$$

كما أن

$$G(x) = x + \frac{2-\lambda(\lambda+1)}{6}x^3$$

$$+ \frac{12-\lambda(\lambda+1)}{20} \times \frac{2-\lambda(\lambda+1)}{6}x^5 + \ldots$$

الآن لنفرض أن λ تأخذ قيماً صحيحة موجبة. فإذا أخذت λ قيماً صحيحة موجبة زوجية فإن $F(x)$ تصبح كثيرة حدود من الدرجة n تحتوي على حدود قوى x الزوجية فقط وتبقى $G(x)$ متسلسلة لانهائية.

أما إذا أخذت λ قيماً صحيحة موجبة فردية فإن $G(x)$ تصبح كثيرة حدود من الدرجة n تحتوي على حدود قوى x الفردية فقط وتبقى $F(x)$ متسلسلة لانهائية. الجدول التالي يبين هذه الملاحظات.

جدول 9.1

λ	$F(x)$	$G(x)$
0	a_0	—
1	—	$a_1 x$
2	$\left(1-3x^2\right)a_0$	—
3	—	$\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)a_1$
4	$\left(1-10x^2+\frac{35}{3}x^4\right)a_0$	—

وبما أن a_0, a_1 تأخذ قيماً اختيارية. نحاول أن نختار قيم المعاملين a_0, a_1 بحيث، تكون قيم الحلول $F(x), G(x)$ مساوية للواحد الصحيح عندما $x = 1$.

بكلمات أخرى نحاول أن نختار قيم a_0, a_1، بشـرط أن يكـون $F(1)=1,\ G(1)=1$.

فمثلاً عندما $\lambda=0$ نختار $a_0=1$ فيكـون فـي هـذه الحالـة أن $F(1)=1$، وعند $\lambda=1$ نختار $a_1=1$ فيكون فـي هـذه الحالـة أن $G(1)=1$، وعند $\lambda=2$ نختـار $a_0=-\frac{1}{2}$ فيكـون فـي هـذه الحالة أن

$$F(x)=-\frac{1}{2}\left(1-3x^2\right)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x \Rightarrow F(1)=1$$

وبالاستمرار في التعويض عن a_0, a_1 بقيـم اختياريـة بحيـث يكـون $F(1)=1,\ G(1)=1$، يمكـن أن نحصـل مـن الحليـن $F(x), G(x)$ علـى عدد لانهـائي مـن كثـيرات الحـدود، التـي تسمى كثيرات حدود ليجندر. إذاً يمكن تعريف بعـض كثـيرات حدود ليجندر على الشكل

$$P_0(x)=1,\ \ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right);$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),\ P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right);$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right);\ \ldots$$

9.3 طريقة فروبينياس
Frobenius Method

رأينا أنه يمكن إيجاد حلول متسلسلات القوى للمعادلات التفاضلية الخطية حول النقط العادية. فإذا كانت x_0 نقطة عادية، فإن الحل المطلوب يجب أن يُفرض على الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

والسؤال المطروح الآن: هل يمكن إيجاد حلول متسلسلات القوى للمعادلات التفاضلية الخطية حول النقط الشاذة ؟. بلغة أخرى هل يمكن لنقطة شاذه للمعادلة التفاضلية أن تكون مركز لمتسلسلة القوى التي تمثل حل هذه المعادلة ؟ الطريقة القادمة للعالم الألماني فردينانت جورج فروبينياس *(Frobenius, F. G., 1849 - 1917)* توجد حلول متسلسلات القوى في حالات النقط الشاذة المنتظمة. اعتبر المعادلة التفاضلية

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{9.10}$$

لنفرض أن $P(0) = 0$. الأمر الذى يعني أن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية (9.10). نبحث الآن عن

حل المعادلة (9.10) في حالة $x > 0$. نضع المعادلة (9.10) في الشكل

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0 \tag{9.11}$$

أو في الشكل

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{9.12}$$

حيث

$$f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \ , \ \ g(x) = \frac{R(x)}{P(x)} \tag{9.13}$$

بضرب (9.12) في x^2، إذاً

$$x^2y'' + x[xf(x)]y' + x^2[g(x)]y = 0 \tag{9.14}$$

طبعاً من الواضح هنا أنه إذا كانت الدالتان $xf(x), x^2g(x)$ ثابتتين فإن المعادلة (9.14) تصبح على شكل معادلة أويلر المعروفة، والتي حلها هو $y(x) = x^r$.

على أية حال، نفرض أن الدالتين $xf(x), x^2g(x)$ ليستا ثابتتين، ولكنهما تحليليتان عند النقطة $x_0 = 0$، بمعنى أن النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية فكيف يمكن الحصول على حل متسلسلات القوى؟ في الحقيقة فإن طريقة فروبينياس تفرض الحل على الشكل

$$\boxed{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^{n+r}} \tag{9.15}$$

وبما أن $xf(x),\ x^2g(x)$ دالتان تحليليتان، إذاً فحسب تعريف الدوال التحليلية، يمكن تمثيلهما على شكل متسلسلات قوى في الشكل

$$xf(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i,\quad x^2g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j x^j \tag{9.16}$$

أيضاً، بتفاضل (9.16) نحصل على

$$y'(x) = (n+r)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^{n+r-1} \tag{9.17}$$

$$y''(x) = (n+r)(n+r-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^{n+r-2} \tag{9.18}$$

بالتعويض من (9.18) ,(9.17) ,(9.16) ,(9.15) في المعادلة (9.14) نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + (A_0 + A_1x+\cdots)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + (B_0 + B_1x+\cdots)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

أو

$$\left[r(r-1)a_0x^r + (1+r)ra_1x^{1+r} + \ \ldots\right]$$

$$+(A_0 + A_1x + \ \cdots)\left\{ra_0x^r + (1+r)a_1x^{1+r} + \ \ldots\right\}$$

$$+(B_0 + B_1x + \ \cdots)\left\{a_0x^r + a_1x^{1+r} + a_2x^{2+r} + \ \ldots\right\} = 0$$

بعد الضرب والاختصار يتم مساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر.

ولنبدأ بمساواة معاملات قوى x^r بالصفر، والقسمة على a_0، باعتبار أن $a_0 \neq 0$ فنحصل على ما يسمى **"بمعادلة تعريف r"** وقد سميت هكذا لأنها تعرفنا بشكل r عند حلها، وهي تسمى بالإنجليزية *(Indicial Equation)*. إذاً معادلة التعريف هي

$$\boxed{r(r-1) + A_0r + B_0 = 0} \tag{9.19}$$

وبحل معادلة التعريف هذه نحصل على الجذرين r_1, r_2، وبمساواة معاملات x^{n+r} بالصفر يمكن أن نحصل على الصورة الاختزالية للمعاملات a_n.

النظرية التالية توضح شكل الحل الذي بالطبع يتوقف على طبيعة الجذرين r_1, r_2.

نظريـــــة نـظريـــــة فروبينياس
9.6 Frobenius Theorem

لنفرض أن r_1, r_2 هما جذرا معادلـة التعريـف رقـم (9.19) الخاصة بالمعادلة التفاضلية (9.10). إذاً، طبقاً لشكل الجذرين r_1, r_2 فـإن حـل المعادلـة (9.10) يمكـن أن ينتمـي إلـى حالـــة واحدة من الثلاث حالات.

الحالة الأولى: إذا كان الجذران r_1, r_2 مختلفين، والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً، أي إذا كان

$$r_1 \neq r_2, \ (r_1 - r_2) \neq integer$$

فإن حل المعادلة التفاضلية (9.10) هو

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}, \ y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}; \quad x > 0} \qquad (9.20)$$

الحالة الثانـيـة : إذا كان الجـذران r_1, r_2 مختلفين، والفـرق بينـهما عدداً صحيحاً موجباً، أي إذا كان

$$r_1 \neq r_2, \ (r_1 - r_2) = Positive\ Integer$$

فإن حل المعادلة التفاضلية (9.10) هو

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}}\ ; \qquad (9.21)$$

$$\boxed{y_2(x) = Ay_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}\ ;\ x > 0;\ A - Constant} \qquad (9.22)$$

الحالة الثالثة: إذا كان الجذران r_1, r_2 مكررين، بمعنى أن يكون $r_1 = r_2 = \alpha$، إذاً فإن حل المعادلة التفاضلية (9.10) هو

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}}\ ; \qquad (9.23)$$

$$\boxed{y_2(x) = y_1 \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+\alpha};\quad x > 0} \qquad (9.24)$$

✍.

مثال 9.5 باستخدام طريقة متسلسلات القوى، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$2x^2y'' + \left(x + 4x^2\right)y' + (2x-1)y = 0 \ ; \quad x > 0$$

الحل في هذه المعادلة لدينا

$$P(x) = 2x^2, \ \ Q(x) = \left(x + 4x^2\right), \ \ R(x) = (2x-1)$$

وبما أن

$$P(x) = x^2 \rightarrow P(0) = 0 \rightarrow x_0 = 0$$

إذاً فإن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية المعطاة. نبحث الآن في ما إذا كانت $x_0 = 0$ نقطة شاذة منتظمة أم غير منتظمة. بما أن

$$\varphi_1(x) = (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = (x-0)\frac{x+4x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} + 2x$$

$$\varphi_2(x) = (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} = (x-0)^2\frac{2x-1}{2x^2} = x - \frac{1}{2}$$

إذاً الدالتان $\varphi_1(x), \ \varphi_2(x)$ تحليليتان عند $x = 0$، وعلى هذا فالنقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة. يمكن ـ أيضاً ـ معرفة إذا كانت النقطة $x = 0$ شاذة منتظمة أم لا ولكن بأسلوب آخر. بما أنه يمكن وضع المعادلة التفاضلية المعطاة في الشكل

$$x^2 y'' + x\left(\frac{1}{2} + 2x\right)y' + \left(x - \frac{1}{2}\right)y = 0 \; ; \quad x > 0$$

إذاً نجد أن الدالتين

$$xf(x) = \frac{1}{2} + 2x, \; x^2 g(x) = x - \frac{1}{2}$$

تحليليتان عند النقطة $x = 0$، إذاً فإن $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية المعطاة، وبالتالي يمكن فرض حل فروبينياس

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

بالتفاضل، نحصل على

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \; ;$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

وبالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+r) a_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)a_n x^{n+r} = 0$$

لجعل كل حدود المعادلة السابقة حدوداً في قوى x^{n+r}، نضع في كل من المتسلسلة الثالثة، والرابعة من جهة اليسار $n-1$ بدلاً من n، فنحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+r)a_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)a_n x^{n+r} = 0$$

أو

$$\left[r(r-1)a_0 + \frac{1}{2}ra_0 - \frac{1}{2}a_0\right]x^r +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+r)(n+r-1)a_n + \frac{1}{2}(n+r)a_n$$

$$+2(n-1+r)a_{n-1} + a_{n-1} - \frac{1}{2}a_n\Big]x^{n+r} = 0$$

بمساواة معاملات x^r بالصفر مع فرض أن $a_0 \neq 0$، نحصل على معادلة التعريف

$$r(r-1)+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$$

حل هذه المعادلة يعطي $r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{2}$. بما أن $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$.
إذاً شكل الحل ينطبق مع الحالة الأولى من نظرية فروبينياس (9.6) ويأخذ الشكل (9.20).

وللحصول على الحل الأول $y_1(x)$، نقوم — أولاً — بمساواة معاملات x^{n+r} بالصفر بغرض الحصول على الصورة الاختزالية العامة

$$(n+r)(n+r-1)a_n+\frac{1}{2}(n+r)a_n$$

$$+2(n-1+r)a_{n-1}+a_{n-1}-\frac{1}{2}a_n=0 \quad for \quad n\geq 1$$

وبالتعويض في هذه الصورة الاختزالية عن $r = r_1 = 1$، نحصل على الصورة الاختزالية لمعاملات a_n الخاصة بالحل الأول والتي تأخذ الشكل

$$a_n=\frac{-2(2n+1)}{n(2n+3)}a_{n-1} \qquad n=1,2,\ldots$$

بالتعويض عن $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ بالترتيب في هذه الصورة الاختزالية يمكن أن نحصل على الشكل النوني للمعاملات a_n، والتي تعتمد على المعامل a_0 وتأخذ الشكل

$$a_n = \frac{3(-1)^n 2^n}{n!(2n+3)} a_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

وهكذا نجد أن

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n 2^n}{n!(2n+3)} a_0 x^{n+1}$$

وبما أنه عندما $n = 0$ فإن

$$\frac{3(-1)^n 2^n}{n!(2n+3)} = 1$$

إذاً فإن الحل الأول هو

$$y_1(x) = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!(2n+3)} x^{n+1}$$

حيث a_0 أي ثابت اختياري غير صفري. للحصول على الحل الثاني $y_2(x)$، نعوض في الصورة الاختزالية العامة عن

$r = r_2 = -\frac{1}{2}$ فنحصل على الصورة الاختزالية لمعاملات b_n الخاصة بالحل الثاني والتي تأخذ الشكل

$$b_n = \frac{-4(n-1)}{n(2n-3)} b_{n-1} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

بالتعويض الآن عن $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ - بالترتيب - في هذه الصورة الاختزالية يمكن أن نحصل على الشكل النوني للمعاملات b_n. فإذا بدأنا بالتعويض عن $n = 1$ فإننا نجد أن $b_1 = 0$. وبالاستمرار في التعويض ببقية قيم n، نجد أن $b_2 = b_3 = \cdots = 0$، الأمر الذي يعني أن الحل الثاني يمكن أن يأخذ الشكل

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} = b_0 x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}}$$

$$= b_0 x^{-\frac{1}{2}} + 0 = \frac{b_0}{\sqrt{x}}$$

حيث b_0 هو أي ثابت اختيارى غير صفري. إذاً الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y(x) = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!(2n+3)} x^{n+1} + \frac{b_0}{\sqrt{x}}$$

✍.

مثال 9.6 باستخدام طريقة متسلسلات القوى، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y'' + 5xy' + (x+4)y = 0$$

الحل في هذه المعادلة لدينا

$$P(x) = x^2,\ Q(x) = 5x,\ R(x) = x+4$$

وبما أن

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذاً فإن $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة المعطاة. وبما أن الدالتين $\varphi_1(x)$، $\varphi_2(x)$ هما دالتان تحليليتان عند النقطة $x = 0$، حيث

$$\varphi_1(x) = xf(x) = (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = x\frac{5x}{x^2} = 5$$

وأيضاً فإن

$$\varphi_2(x) = x^2g(x) = (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} = x^2\frac{x+4}{x^2} = x+4$$

إذاً النقطة $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة. إذاً نفرض حل فروبينياس، $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$. بالتفاضل نحصل على

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

بالتعويض عن $y(x), y'(x), y''(x)$ في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1} + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

نضع $n-1$ بدلاً من n في المتسلسلة الثالثة من جهة اليسار، وذلك حتى تكون في قوى $n+r$، وليس قوى $n+r+1$، إذاً

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + 5\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1} x^{n+r} + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} = 0$$

أو

$$\left[\left(r(r-1)+5r+4\right)a_0\right]x^r$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r+4)+4\right]a_n+a_{n-1}\right\}x^{n+r}=0$$

بمساواة معاملات x^r بالصفر، مع فرض أن $a_0 \neq 0$، نحصل على معادلة تعريف r في الشكل

$$r(r-1)+5r+4=0$$

حل هذه المعادلة يعطي $r_1 = r_2 = \alpha = -2$. وبما أن الجذرين متساويان، إذاً وحسب الحالة الثالثة من نظرية فروبينياس فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة (9.5) هو $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$، حيث $y_1(x), y_2(x)$ يأخذان الشكلين (9.23), (9.24) على الترتيب.

بمساواة معاملات x^{n+r} بالصفر نحصل على الصورة الاختزالية العامة

$$\boxed{a_n = \frac{-1}{(n+r)(n+r+4)+4}a_{n-1}}$$

للحصول على المعاملات a_n الخاصة بالحل الأول $y_1(x)$ نعوض عن $r=-2$ فنحصل على الصورة الاختزالية

$$a_n = \frac{-1}{((n-2)(n+2)+4)}a_{n-1}; \quad n \geq 1$$

أو

$$a_n = \frac{-1}{n^2} a_{n-1} \; ; \quad n \geq 1$$

حيث نجد منها أن

$$a_1 = \frac{-a_0}{1^2}, \quad a_2 = \frac{-1}{2^2} a_1 = \frac{-1}{1^2} \cdot \frac{-1}{2^2} a_0;$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0 \; ; \; n \geq 1$$

وبالتالي فإن

$$y_1(x) = a_0 x^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0 x^{n-2}$$

$$= a_0 \left(x^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2} \right)$$

وبما أنه عند $n = 0$ فإن

$$\frac{(-1)^n}{(n!)^2} = 1$$

إذا فإن

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2}$$

للحصول على المعاملات b_n، وذلك حتى نتمكن من إيجاد الشكل النهائي للحل الثاني $y_2(x)$ نقوم بتفاضل الحل $y_2(x)$ فنحصل على

$$y_2'(x) = \frac{y_1}{x} + y_1'(x)\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)b_n x^{n-3}$$

وبتفاضل $y_2'(x)$ نحصل على

$$y_2''(x) = \frac{-y_1(x)}{x^2} + \frac{y_1'(x)}{x} + y_1''(x)\ln(x)$$

$$+\frac{y_1'(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-4}$$

وبالتعويض عن الكميات $y_2(x),\ y_2'(x),\ y_2''(x)$ بدلاً من الكميات $y(x),\ y'(x),\ y''(x)$ في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$-y_1(x) + 2xy_1'(x) + x^2 y_1''(x)\ln(x)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-2} + 5y_1(x) + 5xy_1'(x)\ln(x)$$

$$+5\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)b_n x^{n-2} + (x+4)y_1(x)\ln(x)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$4y_1(x) + 2xy_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-2}$$

$$+5\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2}$$

$$\left(x^2 y_1''(x) + 5xy_1'(x) + (x+4)y_1(x)\right)\ln(x) = 0$$

وبما أن الحد الأخير من المعادلة السابقة يتلاشى، وذلك لأن $y_1(x)$ هو ـ أيضاً ـ حل للمعادلة الأصلية المعطاة، وبالتالي يحققها، بمعنى أن

$$x^2 y_1''(x) + 5xy_1'(x) + (x+4)y_1(x) = 0$$

إذاً

$$4y_1 + 2xy_1' + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)(n-3)b_n x^{n-2}$$

$$+5\sum_{n=1}^{\infty}(n-2)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0$$

إذاً، بالتعويض عن

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2},$$

$$y_1{}'(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (n-2) \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-3}$$

في المعادلة السابقة مع فرض أن $a_0 = 1$ (لاحظ أن a_0 تأخذ قيماً اختيارية) نجد أن

$$4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (n-2) x^{n-2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3) b_n x^{n-2} + 5\sum_{n=1}^{\infty} (n-2) b_n x^{n-2}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1} x^{n-2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-2} = 0$$

نلاحظ هنا أنه قد تم وضع $n-1$ بدلاً من n في المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}$ فأصبحت $\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-1} x^{n-2}$. الآن، بإعادة ترتيب المعادلة السابقة نحصل على

$$4x^{-2}-4x^{-1}+2(-2)x^{-2}-2(-1)x^{-1}+2b_1x^{-1}-5b_1x^{-1}$$

$$+4b_1x^{-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^n}{(n!)^2}+\frac{2(-1)^n}{(n!)^2}(n-2)\right.$$

$$\left.+(n-2)(n-3)b_n+5(n-2)b_n+b_{n-1}+4b_n\right]x^{n-2}=0$$

وبمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر للحصول على المعاملات b_n نجد أن

$$x^{-1}: \qquad -2+b_1=0 \quad \Rightarrow \quad b_1=2$$

$$x^{n-2}: \quad \frac{2n(-1)^n}{(n!)^2}+n^2b_n+b_{n-1}=0\ ; \quad n=2,3,4,\ldots$$

إذاً الصورة الاختزالية للمعاملات b_n هي

$$b_n=\frac{-b_{n-1}}{n^2}-\frac{2n(-1)^n}{n^2(n!)^2};\ n\geq 2$$

ومنها نجد أن

$$b_2=\frac{-b_1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4},\quad b_3=\frac{-b_2}{9}-\frac{-6}{9\cdot 6^2}=\frac{11}{108},\ \ldots$$

إذاً الحل الثاني $y_2(x)$ هو

$$y_2(x) = y_1 \ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{3}{4} + \frac{11}{108}x - \frac{25}{570}x^2 + \cdots$$

مثال 9.7 باستخدام طريقة متسلسلات القوى، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$$

الحل في هذه المعادلة لدينا

$$P(x) = x^2,\ Q(x) = x^2,\ R(x) = -2$$

وبما أن

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

إذاً $x_0 = 0$ هي نقطة شاذة. وبما أن الدالتين $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ هما تحليليتان عند $x = 0$، وذلك بسبب أن

$$\varphi_1(x) = xf(x) = (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = x\frac{x^2}{x^2} = x$$

كما أن

$$\varphi_2(x) = x^2g(x) = (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} = x^2\frac{-2}{x^2} = -2$$

إذاً فإن النقطة $x_0 = 0$ نقطة شاذة منتظمة، ولذا نفرض حل فروبينياس

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

بتفاضل هذا الحل، والتعويض في المعادلة المعطاة عن $y(x), y'(x), y''(x)$ والاختصار، نجد أن

$$\left[r(r-1)a_0 - 2a_0\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n\right.$$

$$\left.+(n+r-1)a_{n-1} - 2a_n\right]x^{n+r} = 0$$

بفرض أن $a_0 \neq 0$، يمكن أن نحصل على معادلة تعريف r في الشكل

$$\boxed{r(r-1) - 2 = 0}$$

بحلها نجد أن

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -1$$

وبما أن $r_1 - r_2 = 3$. إذاً، وحسب الحالة الثانية من نظرية فروبينياس فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يأخذ الشكل

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

حيث الحلان $y_1(x), y_2(x)$ يعطيان من (9.21)، (9.22). الآن وبعد مساواة معاملات x^{n+r} بالصفر نحصل على الصورة الاختزالية العامة في الشكل

$$a_n = \frac{-(n+r-1)}{(n+r)(n+r-1)-2} a_{n-1}; \quad n \geq 1$$

وللحصول على معاملات a_n، والخاصة بالحل الأول $y_1(x)$ نعوض عن $r = r_1 = 2$ فنحصل على الصورة الاختزالية

$$a_n = \frac{-(n+1)}{n(n+3)} a_{n-1} \ ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

وبالتالي فإن

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = a_0 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n+1)}{n(n+3)} a_{n-1} x^{n+2}$$

$$= a_0 x^2 \left(1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{20} x^2 - \ \cdots + \cdots\right)$$

بما أن الحل الثاني يأخذ الشكل

$$y_2(x) = A y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \quad ; \quad x > 0$$

إذاً بوضع $r = -1$ نجد أن

$$y_2(x) = A y_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

هكذا نرى أنه للحصول على الشكل النهائي للحل الثاني $y_2(x)$، علينا بالحصول على المعاملات b_n. بتفاضل الحل $y_2(x)$ نحصل على $y_2'(x), y_2''(x)$. إذاً، وبالتعويض عن y_2, y_2', y_2'' بدلاً من y, y', y'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$Ax^2 y_1'' \ln(x) + 2Axy_1' - Ay_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)b_n x^{n-1}$$

$$+Ax^2 y_1' \ln(x) + Axy_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-2)b_{n-1}x^{n-1}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} - 2Ay_1 \ln(x) = 0$$

وبإعادة ترتيب حدود هذه المعادلة نجد أنها تتحول إلى الشكل الجديد

$$A\ln(x)\left(x^2 y_1'' + x^2 y_1' - 2y_1\right) + 2Axy_1' - Ay_1 + Axy_1$$

$$-2b_0 x^{-1} + 2b_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n-1)(n-2)-2\right]b_n\right.$$

$$\left.+(n-2)b_{n-1}\right\}x^{n-1} = 0$$

وبما أن الحد الأول من المعادلة السابقة يتلاشى وذلك لان $y_1(x)$ هو ـ أيضاً ـ حل للمعادلة الأصلية المعطاة وبالتالي يحققها بمعنى أن $x^2y_1'' + x^2y_1' - 2y_1 = 0$، إذاً

$$2Axy_1' - Ay_1 + Axy_1 - 2b_0x^{-1} + 2b_0x^{-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n-1)(n-2)-2]b_n + (n-2)b_{n-1}\}x^{n-1} = 0$$

إذاً، بالتعويض عن $y_1(x), y_1'(x)$ في المعادلة السابقة، مع فرض أن $a_0 = 1$ (لاحظ أن تأخذ قيماً اختيارية)، ومساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر حتى نتمكن من الحصول على المعاملات b_n نجد أن

$$\begin{cases} x^0 & : & -b_0 - 2b_1 = 0 & \Rightarrow & b_1 = -\frac{1}{2}b_0 \\ x^1 & : & -2b_2 = 0 & \Rightarrow & b_2 = 0 \\ x^2 & : & 3A + b_2 = 0 & \Rightarrow & A = b_2 = 0 \end{cases}$$

بمساواة المعاملات بدأً من معاملات قوى x^3 إلى معاملات قوى x الأعلى من 3 بالصفر نحصل على قيم المعاملات $b_4, b_5, b_6, \ldots$ الباقية حيث نجد أنهم ـ جميعاً ـ يعتمدون على المعامل b_3. إذاً فالمعامل b_3 يمكن اعتباره اختيارياً ويمكن عندئذٍ اختياره مساوياً للصفر، إذاً الحل الثاني هو

$$y_2(x) = Ay_1(x)\ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

$$= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} = b_0 x^{-1} + b_1 x^0 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots$$

$$= b_0 x^{-1} - \tfrac{1}{2} b_0 - b_3\left(x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 - \cdots\right)$$

وبما أن $b_3 = 0$. إذاً فإن

$$y_2(x) = \frac{b_0}{x} - \frac{b_0}{2} = b_0\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right); \quad b_0 \neq 0$$

.✍

9.4 مسائل

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية باستخدام طريقة متسلسلات القوى

(1) $y'' + xy' + y = 0$

(2) $y'' - e^x y = 0$

(3) $y'' + xy = 0$

(4) $y'' + x^2 y = 0$

(5) $(x-1)y'' + xy' + y = 0 \ ; \ y(0) = 2, \ y'(0) = -1$

(6) $y'' + xy' - \dfrac{2}{x^2} y = 0$

(7) $2x^2y'' - x(x-1)y' - y = 0$

(8) $y'' + \sin(x)y = x^2$

(9) $9x^2y'' + 3xy' + 2(x-4)y = 0$

(10) $xy'' + y' - y = 0$

(11) $xy'' + y' + y = 0$

(12) $xy'' - y' + y = 0$

****

الباب 10

الحلول العددية للمسائل الابتدائية
Numerical Solutions to Initial Value Problems

في هذا الباب نقدم بعض الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية العادية ذات الشروط الابتدائية أو ما يسمى بالمسائل الابتدائية *(Initial Value Problems)* أو مسائل كوشي الابتدائية *(Cauchy's Problems)*. حيث نقدم ثلاث طرق عددية: هي طريقة أويلر *(Euler Method)*، وطريقة أويلر المتطورة وأخيراً طريقة رانج - كوتة.

لكننا في البداية نقدم مفهوماً هاماً جداً؛ إذ يجب أولاً ــ وقبل البدء في إيجاد حل أى مسألة ابتدائية ــ التأكد من أن المسألة الابتدائية هي من النوع الذي يسمى بالإنجليزية *(Well-Posed Problem)*؛ الأمر الذي يعني وجود الحل وأنه حل مستقر.

10.1 مسألة كوشي
Cauchy Problem

نتعرف في هذا الفصل على مسألة ابتدائية هامة وهي مسألة كوشي الابتدائية نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي أوغسطين كوشي *(Cauchy A.L, 21/08/1789 - 32/05/1857)*.

في الواقع فإن الحل المضبوط أو الحل التحليلي لمسألة كوشي يعني الحصول على الدالة $y(t)$ حيث $t > t_0$ والتي تحقق المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n التي على الشكل

$$f\left(t, y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{10.1}$$

كما تحقق ـ أيضاً ـ الشروط الابتدائية

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0{}', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(t_0) = y_0{}^{(n-1)} \tag{10.2}$$

غير أننا سوف نركز اهتمامنا في هذا الباب على إيجاد فئة الحلول العددية عند بعض العقد $(t_i)_{i=0}^{n}$، والتي سوف نرمز لها بالرمز $\{y(t_i)\}_{i=0}^{n}$. لنعتبر مسألة كوشي الابتدائية من الرتبة الأولى والتي تأخذ الشكل

$$y' = f(t, y) \ ; \ y(t_0) = y_0 \ ; \ t \in [a, b] \tag{10.3}$$

حيث الدالة $f(t, y)$ متصلة في المنطقة

$$\{|t - t_0| \le a, \ \ |y - y_0| \le b\}$$

هذا، ومن المعروف أن مسألة كوشي هذه تعتبر من النوع الذي يسمى بالانجليزية *(Well-Posed Problem)* أو مسألة غير مهتزة وذلك لأنها تحقق الشروط التالية:

(1) الحل $y(t)$ موجود *(Exists)*، وفي حالة وجوده فهو حل وحيد *(Unique)*.

(2) يوجد عدد $\varepsilon > 0$، وبالتالي يوجد الحل الوحيد $z(t)$ للمسألة الابتدائية

$$z' = f(t, z) + \delta(t) \; ; \quad z(t_0) = z_0 + \varepsilon_0$$

وذلك متى كان

$$|\varepsilon_0| < \varepsilon, \; \delta(t) < \varepsilon \quad \forall \; t \in [a, b]$$

(3) إذا وجد العدد $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد بالمقابل عدد موجب ثابت $k > 0$ بحيث يكون

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon \quad \forall \; t \in [a, b]$$

10.2 طريقة أويلر لحل المسائل الابتدائية
Euler's Method

لنعتبر المسألة الابتدائية غير المهتزة من الرتبة الأولى

$$y' = f(t, y) \; ; \quad t \in [a, b] \tag{10.4}$$

بالشرط الابتدائي

$$y(t_0) = y_0$$

والمطلوب هو الحصول على فئة الحلول العددية $\{y(t_i)\}_{i=0}^{n}$ لهذه المسألة وذلك عند بعض العقد $(t_i)_{i=0}^{n}$ التي تقع داخل الفترة $[a,b]$.

واضح ـ طبعاً ـ أن الحل المضبوط $y(t)$ هو حل متصل *(Continuous Solution)* على طول الفترة $[a,b]$، بينما الحل العددي $\{y(t_i)\}_{i=0}^{n}$ هو حل متقطع *(Discrete Solution)* إذ أنه يتكون من الحلول التقريبية عند عدد محدود من العقد $(t_i)_{i=0}^{n}$ المختارة مسبقاً. بالمناسبة فإن هذه العقد ـ أحياناً ـ ما تسمى *(Mesh Points)*.

لنقسم الآن الفترة $[a,b]$ إلى عدد n من الفترات الجزئية المتساوية الأطوال بحيث يكون

$$[a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [t_k, t_{k+1}]$$

وهكذا نجد أن

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \Rightarrow \quad t_k = t_0 + kh \;; \quad k = \overline{0,n}$$

وبتكامل طرفي المعادلة (10.4) بالنسبة إلى المتغير t على أية فترة جزئية $[t_k, t_{k+1}]$ مثلاً نحصل على

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'\,dt = y(t)\Big|_{t_k}^{t_{k+1}} = y(t_{k+1}) - y(t_k)$$

أو

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t,y)dt$$

وحيث أن $y' = f(t,y)$، إذاً يمكن اعتبار أن الدالة $f(t,y)$ تساوي ميل المماس أو قيمة المشتقة الأولى على الفترة الجزئية $[t_k, t_{k+1}]$.

لنفرض أنه يساوي قيمة المشتقة الأولى عند نقطة بداية الفترة أي عند النقطة t_k. وبالتالي يمكن ـ بالتقريب ـ اعتبار الدالة $f(t,y)$ بمثابة مقدار ثابت عند النقطة t_k، وعندئذٍ يمكنها الخروج من تحت تأثير التكامل. إذاً

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + f(t_k, y(t_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt$$

$$= y(t_k) + f(t_k, y(t_k))[t_{k+1} - t_k]$$

وبما أن

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)), \quad h = t_{k+1} - t_k$$

إذاً فإن

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h\,y'(t_k) \tag{10.5}$$

هكذا، وباستخدام هذه القاعدة يمكن حساب الحلول العددية $\{y(t_i)\}_{i=1}^{n}$ باعتبار أن $y(t_0)=y_0$. أيضاً بما أنه من (10.5) لدينا

$$h\,y'(t_k)=y(t_{k+1})-y(t_k)=\Delta\,y(t_k) \tag{10.6}$$

إذاً، وبالتعويض مرة أخرى من (10.6) في (10.5) نجد أن

$$\boxed{y(t_{k+1})\approx y(t_k)+\Delta\big(y(t_k)\big)} \tag{10.7}$$

حيث تسمى المعادلة (10.7) **"معادلة الفروق المحدودة"** *(Difference Equation)* الخاصة بطريقة أويلر.

10.3 حساب خطأ طريقة أويلر
Estimate of the Error of Euler's Method

لنفرض أن الدالة $f(t,y)$ في المعادلة التفاضلية (10.4) دالة متصلة على المستطيل

$$\Omega=\{|t-t_0|\le a,\ \ |y-y_0|\le b\}$$

وأنها تحقق الشرطين

$$|f(t_1,y_1)-f(t_1,y_2)|\le \delta_1|y_1-y_2|\ ;$$

$$\left|\frac{df(t,y)}{dt}\right|=\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}+f(t,y)\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|\le \delta_2$$

حيث δ_1, δ_2 ثوابت. فإذا كانت $y(t_n)$ هي القيمة المضبوطة لحل المسألة (10.4) عند العقدة t_n وكانت $\bar{y}(t_n)$ هـي القيمـة التقديرية المحسوبة بطريقـة أويلر شكل (10.5) فـإن الفـرق بين القيمتين (أو الخطأ) يمكن أن نحصل عليه في الشكل

$$|y(t_n) - \bar{y}(t_n)| \le \left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\left((1 + h\delta_1)^n - 1\right) \qquad (10.8)$$

مثال 10.1 أوجد الحلول العددية على الفترة $[0,0.1]$ للمسألة الابتدائية

$$.\, y' = 2t + y;\ y(0) = 1$$

الحل نقسم الفترة $[0,0.1]$ إلى عدد خمس فـترات جزئيـة $(n = 5)$ فنجد أن مقاس الخطوة هو

$$h = \frac{0.1 - 0}{5} = 0.02$$

ونحصل بذلك على فئة العقد

$$\{0.00,\ 0.02,\ 0.04,\ 0.06,\ 0.08,\ 0.10\}$$

ولكي نتمكن مـن تطبيـق الصـورة الرياضيـة (10.5) بسـهولة نكَون جدول (10.1).

جدول 10.1

k	t_k	$y(t_k)$	$y_k' = 2t_k + y_k$	$h\,y_k'$
0	0.00	1.0000	1.0000	0.0200
1	0.02	1.0200	1.0600	0.0212
2	0.04	1.0412	1.1212	0.0224
3	0.06	1.0636	1.1836	0.0236
4	0.08	1.0872	1.2472	0.0249
5	0.10	1.1121		

حيث نجد من هذا الجدول أن الحلول العددية باستخدام طريقة أويلر (10.5) هي

$$y(0.00) = 1.0000 \quad ; \quad y(0.06) = 1.0624$$
$$y(0.02) = 1.0200 \quad ; \quad y(0.08) = 1.0848$$
$$y(0.04) = 1.0408 \quad ; \quad y(0.10) = 1.1081$$

✍.

10.4 طريقة أويلر المتطورة

Modified Euler's Method

في فصل (10.2) تعاملنا مع الدالة المكاملة $f(t,y)$ على أنها دالة ثابتة عند العقدة t_k (نقطة بداية الفترة $[t_k, t_{k+1}]$). الآن، إذا فرضنا أنها ثابتة عند العقدة t_{k+1} (نقطة نهاية الفترة) فإن المعادلة (10.5) في هذه الحالة تتحول إلى

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h\,y'(t_{k+1}) \tag{10.9}$$

بجمع المعادلة (10.5) مع المعادلة (10.9)، والقسمة على 2 نحصل على الصيغة التقريبية المتوسطة

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h\left\{\frac{y'(t_k) + y'(t_{k+1})}{2}\right\} \quad (10.10)$$

الطريقة التي حصلنا بها على الصيغة التقريبية (10.5) تسمى "**بطريقة أويلر**"، والطريقة التي حصلنا بها على الصيغة التقريبية (10.10) تسمى "**طريقة أويلر المتطورة**"؛ وذلك نسبة إلى عالم الرياضيات والفيزياء والميكانيكا والفلك السويدي ليونارد أويلر *(Euler L., 15/04/1707-18/09/1800)*.

مثال 10.2 أوجد الحلول العددية للمسألة الابتدائية في مثال (10.1) باستخدام طريقة أويلر المتطورة. اختر $h = 0.02$.

الحل أولاً: نكون جدول (10.2).

جدول 10.2

k	0	1	2	3	4	5
t_k	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
$y(t_k)$	1.0000	1.0204	1.0416	1.0637	1.0866	1.1104
$y'(t_k)$	1.0000	1.0604	1.1216	1.1837	1.2466	1.3104
$hy'(t_k)$	0.0200	0.0212	0.0224	0.0237	0.0249	0.0262
$y(t_{k+1})$	1.0200	1.0416	1.0640	1.0874	1.1115	1.1366

$y'(t_{k+1})$	1.0400	1.0816	1.1240	1.1674	1.2115	
y'_{av}	1.0200	1.0710	1.1228	1.1756	1.2291	
hy'_{av}	0.0204	0.0214	0.0225	0.0235	0.0246	

لاحظ في هذا الجدول أن

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + hy'(t_k), \quad y'(t_k) = 2t_k + y(t_k)$$

$$y'(t_{k+1}) = 2t_{k+1} + y(t_{k+1}), \quad y_{av}' = \frac{y'(t_k)}{2} + \frac{y'(t_{k+1})}{2}$$

وهكذا، نجد من هذا الجدول أن الحلول العددية باستخدام الصيغة (10.10) من طريقة أويلر المتطورة هي

$$\begin{aligned} y(0.00) &= 1.0000 \; ; & y(0.06) &\approx 1.0637 \\ y(0.02) &\approx 1.0204 \; ; & y(0.08) &\approx 1.0866 \\ y(0.04) &\approx 1.0416 \; ; & y(0.10) &\approx 1.1104 \end{aligned}$$

الآن يمكن أن نقارن مع الحل التحليلي لهذه المسألة الابتدائية، حيث نجد أن المعادلة التفاضلية $y' = 2t + y$ ما هي إلا معادلة خطية من الرتبة الأولى. إذا وضعت على الشكل $y' - y = 2t$، يصبح معاملها التكاملي هو

$$\mu = e^{\int -dt} = e^{-t}$$

وحلها العام هو

$$y = \frac{1}{e^{-t}} \int (2t) e^{-t} dt + \frac{c}{e^{-t}} = \frac{2}{e^{-t}} \left(-te^{-t} - e^{-t} \right) + \frac{c}{e^{-t}}$$

ومن الشرط الابتدائي فإن $y(0) = 1$. نعوض في هذا الحل العام عن $t = 0$، $y = 1$ فنجد أن $c = 3$، وبالتالي فإن الحل العام يصبح على الشكل

$$y(t) = -2(t+1) + \frac{3}{e^{-t}}$$

ويمكن الآن تكوين جدول (10.3) للمقارنة حيث نجد أن طريقة أويلر المتطورة تعطي حلولاً عددية أدق من طريقة أويلر العادية (مثال (10.1))، وذلك بالمقارنة مع الحل التحليلي (الحل المضبوط). انظر جدول (10.3).

جدول 10.3

t_k	Exact Solution	Numerical Solution by Modified Euler's Method (10.10)	Numerical Solution by Euler's Method (10.5)
0.00	1.0000	1.0000	1.0000
0.02	1.0206	1.0204	1.0200
0.04	1.0424	1.0416	1.0408
0.06	1.0655	1.0637	1.0624
0.08	1.0899	1.0866	1.0848
1.00	1.1155	1.1104	1.1081

✍.

10.5 طريقة رونج – كوتة
Runge - Kutta Method

في هذا الفصل نقدم طريقة عددية جديدة لحل المسائل الابتدائية تسمى **"طريقة رونج ـ كوتة"**. وهذه الطريقة العددية الهامة والمشهورة جداً قد وضعها العالمان الألمانيان رونج كارل دافيد ***(Runge C. D., 1856-1927)*** وكوتة ***(Kutta W. M., 1867-1944)***.

لنعتبر مرة أخرى المسألة الابتدائية (10.3) والمطلوب الآن هو الحصول على فئة الحلول العددية $\{y(t_i)\}_{i=0}^{n}$. لنقسم الفترة إلى عدد n من الفترات الجزئية المتساوية بحيث يكون مقاس الخطوة هو $h=\dfrac{b-a}{n}$ وبذلك نحصل على فئة العقد

$$t_i = t_0 + ih \quad ; \quad \left(i=\overline{0,n}\right)$$

رأينا أن حل المسألة الابتدائية (10.3) باستخدام طريقة أويلر يأخذ الشكل (10.7) أي الشكل

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \Delta\left(y(t_k)\right)$$

فهل يمكن لنا حساب الفرووق $\Delta\left(y(t_k)\right)$ بطريقة أخرى تكون أدق من طريقة أويلر؟

الإجابة عن هذا السؤال تقدمة طريقة رونج ـ كوتة. بتقريب الدالة $y(t_k+h)$ على شكل كثيرة حدود تايلور من الدرجة الرابعة مع اعتبار أن t_k هي نقطة الأساس يمكن أن نمثل الدالة $y(t_k+h)$ في الشكل

$$y(t_k+h)=y(t_k)+\frac{y'(t_k)}{1!}h+\frac{y''(t_k)}{2!}h^2$$

$$+\frac{y^{(3)}(t_k)}{3!}h^3+\frac{y^{(4)}(t_k)}{4!}h^4$$

وبالتالي فإن

$$\Delta(y(t_k))=y(t_k+h)-y(t_k)$$

$$=\frac{y'(t_k)}{1!}h+\frac{y''(t_k)}{2!}h^2+\frac{y^{(3)}(t_k)}{3!}h^3+\frac{y^{(4)}(t_k)}{4!}h^4 \qquad (10.11)$$

حيث يمكن لنا الحصول على المشتقات $y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}$ بتفاضل المعادلة رقم (10.3) على التوالي.

وبالتعويض من (10.11) في (10.3) نحصل على الحلول العددية $\{y(t_i)\}_{i=0}^{n}$.

هذا وقد أثبتت طريقة رونج ـ كوتة أنه يمكن الحصول على الفروق المحدودة $\Delta(y(t))$ باسلوب آخر في الشكل

$$\Delta(y(t_k)) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (10.12)$$

حيث

$$k_1 = hf(t, y) \; ; \qquad k_2 = hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) \; ; \qquad k_4 = hf(t + h, y + k_3)$$

إذاً لحساب الفروق المحدودة $\Delta(y(t))$ لكل عقدة t_i والقيمة الدالية المقابلة y_i وذلك باستخدام الشكل (10.14) بدلاً من الشكل (10.13) فالأمر يحتاج إلى حساب الأربع كميات

$$k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)}$$

هذا، وإذا فرضنا أن

$$f_{i,j}^{s} = f\left(t_i + j\,h, y_i + j\,k_s^{(i)}\right), \quad f_{i,i} = f(t_i\,, y_i),$$

حيث

$$i = \overline{0, n}, \; j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \; s = \overline{1, 3}$$

عندئذٍ يمكن تكوين الجدول (10.4) والذي يسهل عملية الحسابات، وبالتالي يسهل عملية الحصول على الحلول العددية باستخدام طريقة رونج - كوتة.

جدول 10.4

i	t	y	$y' = f(t, y)$	$hf(t, y)$	Δy
	t_0	y_0	$f_{0,0}$	$k_1^{(0)}$	$k_1^{(0)}$
	$t_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}$	$f^1_{0,\frac{1}{2}}$	$k_2^{(0)}$	$2k_2^{(0)}$
0	$t_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}$	$f^2_{0,\frac{1}{2}}$	$k_3^{(0)}$	$2k_3^{(0)}$
	$t_0 + h$	$y_0 + k_3^{(0)}$	$f^3_{0,1}$	$k_4^{(0)}$	$k_4^{(0)}$
					Δy_0
	t_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	$f_{1,1}$	$k_1^{(1)}$	$k_1^{(1)}$
	$t_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1^{(1)}}{2}$	$f^1_{1,\frac{1}{2}}$	$k_2^{(1)}$	$2k_2^{(1)}$
1	$t_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_2^{(1)}}{2}$	$f^2_{1,\frac{1}{2}}$	$k_3^{(1)}$	$2k_3^{(1)}$
	$t_1 + h$	$y_1 + k_3^{(1)}$	$f^3_{1,\frac{1}{2}}$	$k_4^{(1)}$	$k_4^{(1)}$
					Δy_1
2	t_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$			

هذا، ويمكن الحصول على درجة الدقة المطلوبة أو حساب الخطأ باستخدام ما يسمى بقاعدة *(Duplication Check)*

$$\left|\tilde{y}(t_k) - y(t_k)\right| \approx \frac{\tilde{\tilde{y}}(t_k) - \tilde{y}(t_k)}{15} \qquad (10.13)$$

هنا فإن $y(t_k)$ هي قيمة الحل المضبوط، أما $\tilde{\tilde{y}}(t_k)$ فهي قيمة الحل التقريبي بمقاس الخطوة $\frac{h}{2}$، بينما $\tilde{y}(t_k)$ فهي قيمة الحل التقريبي بمقاس الخطوة h.

وبما أن $h = \frac{b-a}{n}$، وإذاً كانت ε هي الدقة المطلوبة للحل فإن العدد n يجب أن 'يختار بحيث يكون

$$h^4 < \varepsilon \qquad (10.14)$$

مثال 10.3 إذا كان $y' = 1 - y,\ y(0) = 0,\ x \in [0,1]$. أوجد الحل العددي $y(0.2)$ لهذه المسألة الابتدائية بحيث لايتعدى الخطأ المسموح عن 0.0001.

الحل أولاً، لدينا

$$h^4 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h^4 < 0.0001 \quad \Rightarrow \quad h = 0.1$$

بالتطابق مع جدول (10.4) نكَون جدول (10.5) من البيانات السابقة. ثم باستخدام (10.12) نحصل على $\Delta(y(0.2))$. بعد ذلك نستخدم المعادلة

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + \Delta(y(t_k))$$

للحصول على الحل $y(0.2)$. في الحقيقة فإن $y(0.2) \approx 0.181268$. انظر جدول (10.5).

جدول 10.5

i	t	y	$y' = f(t,y)$	$K = hf(t,y)$	Δy
0	0	0.0000000	1.0000000	0.100000	0.100000
	0.05	0.0500000	0.9500000	0.095000	0.190000
	0.05	0.0475000	0.9525000	0.095250	0.190500
	0.1	0.0952500	0.9047500	0.090475	0.090475
					$\Delta y_0 =$ 0.0951625
1	0.1	0.0951625	0.9048375	0.09048375	0.09048375
	0.15	0.140404	0.8595960	0.08595900	0.17191800
	0.15	0.1381421	0.8618500	0.08618500	0.1723700
	0.2	0.1813482	0.8186517	0.08186517	0.08186517
					$\Delta y_1 =$ 0.0861061
2	0.2	0.181268			

✍.

10.6 مسائل

استخدم طريقة أويلر وطريقة أويلر المتطورة، ثم طريقة رونج ـ كوتة للحصول على الحلول العددية للمسائل الابتدائية الآتية، ثم قارن الحلول العددية مع الحلول المضبوطة.

(1) $y' = y - 2x\ ; x \in [0,1]\ ;\ y(0.0) = 1.5000; h = 0.25$

(2) $y' = y + x;\ x \in [0, 0.5];\ y(0.0) = 1.0000;\ (h = 0.02)$

(3) $y' = x^2 - y\ ;\ x \in [0,1]\ ;\ y(0.0) = 2.0000\ ; (h = 0.01)$

(4) $y' = y^2 + x\ ; x \in [0, 1.5]\ ; y(1.0) = 0.0\ ; (h = 0.01)$

****

حلول المسائل

ذات

الأرقام الفردية

1

بفصل المتغيرات، إذاً

$$y\,dy = \left(x^2 + 2\right)dx$$

وبإجراء عملية التكامل، إذاً

$$\int y\,dy = \int \left(x^2 + 2\right)dx + C$$

إذاً الحل العام هو

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

3

بفصل المتغيرات، إذاً

$$(y + 2)dy = (x - 1)dx$$

وبإجراء عملية التكامل، إذاً

$$\int (y+2)dy = \int (x-1)dx + C$$

إذاً الحل العام $y(x)$ نحصل عليه من

$$\frac{(y+2)^2}{2} = \frac{(x-1)^2}{2} + C$$

5

بفصل المتغيرات، إذاً

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{x} \quad \Rightarrow \quad e^{-y}dy = \frac{1}{x}dx$$

بالتكامل

$$\int e^{-y}dy = \int \frac{1}{x}dx + C$$

إذاً الحل العام $y(x)$ نحصل عليه من

$$-e^{-y} = \ln|x| + C$$

7

بالتكامل، إذاً

$$\int 3x dx + \int (y+4)dy = C$$

إذاً الحل العام $y(x)$ نحصل عليه من

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{(y+4)^2}{2} = C$$

9

يمكن وضع المعادلة على الصورة

$$\left(y^2 + x^2\right)dx - 2x^2 dy = 0$$

حيث نجد أن

$$P(x,y) = \left(y^2 + x^2\right), \quad Q(x,y) = -2x^2$$

وبما أن $Q(x,y)$, $P(x,y)$ هي دوال متجانسة وذلك لأن

$$P(tx,ty)=\left(t^2y^2+t^2x^2\right)=t^2\left(y^2+x^2\right)=t^2P(x,y);$$

$$Q(tx,ty)=-2(tx)^2=t^2\left(-2x^2\right)=t^2Q(x,y)$$

إذاً فإن المعادلة المعطاة هي معادلة متجانسة ولإيجاد الحل العام لها نضع $x=vy$ فتتحول المعادلة إلى معادلة انفصالية. وبما أن $x=vy$، إذاً $dx=vdy+ydv$ وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$2v^2y^2dy-\left(y^2+v^2y^2\right)(vdy+ydv)=0$$

وبأخذ y^2 كعامل مشترك والقسمة عليه لأنه لايساوي الصفر، إذاً

$$2v^2dy-\left(1+v^2\right)(vdy+ydv)=0$$

أو

$$\left(2v^2-v-v^3\right)dy-y\left(1+v^2\right)dv=0$$

بفصل المتغيرات والتكامل، إذاً

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{\left(1+v^2\right)}{-v(v-1)^2}dv+C$$

أو

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{(v-1)^2+2v}{-v(v-1)^2}dv+C$$

أو

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dv}{v} - \int \frac{2}{(v-1)^2}\, dv + C$$

إذاً

$$\ln|y| = -\ln|v| + \frac{2}{v-1} + C$$

وبالتعويض عن $v = \frac{x}{y}$، إذاً الحل العام يمكن أن نحصل عليه من

$$\ln|y| = -\ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{2y}{x-y} + C \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{2y}{x-y} + C$$

11

هذه معادلة متجانسة، نضع

$$x = vy \quad , \quad dx = vdy + ydv$$

إذاً

$$vydy = \left(y + 4\sqrt{vy^2}\right)(vdy + ydv)$$

أو

$$y\left[4v^{\frac{3}{2}}dy + y\left(1 + 4\sqrt{v}\right)dv\right] = 0$$

بفرض أن $y \neq 0$، إذاً

$$4v^{\frac{3}{2}}dy + y\left(1 + 4\sqrt{v}\right)dv = 0$$

بفصل المتغيرات، إذاً

$$\frac{dy}{y}=\frac{-\left(1+4\sqrt{v}\right)}{4v^{\frac{3}{2}}}dv$$

بالتكامل

$$\int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{4}\int v^{-\frac{3}{2}}dv-\int\frac{dv}{v}+C$$

إذاً الحل العام هو

$$\ln|y|=-\ln|v|+\frac{1}{2\sqrt{v}}+C$$

وبالتعويض عن $v=\frac{x}{y}$، إذاً

$$\ln|y|=-\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}+C \quad\Rightarrow\quad \ln|x|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}+C$$

13

هذه معادلة متجانسة، نضع

$$x=vy \quad , \quad dx=vdy+ydv$$

إذاً

$$(vy+y)dy=(vy-y)(vdy+ydv)$$

أو

$$y\left[\left(-v^2+2v+1\right)dy+y(1-v)dv\right]=0$$

بفرض أن $y\neq 0$، إذاً

$$\left(-v^2+2v+1\right)dy+y(1-v)dv=0$$

إذاً

$$\frac{dy}{y} = \frac{v-1}{-v^2 + 2v + 1} dv$$

بالتكامل

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{v-1}{-v^2 + 2v + 1} dv + C$$

الحل العام هو

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left|-v^2 + 2v + 1\right| + C$$

وبالتعويض عن $v = \frac{x}{y}$، إذاً

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left|-\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 1\right| + C$$

15

نضع المعادلة على الشكل

$$\left(x^2 + \frac{y^3}{x}\right)dx - y^2 dy = 0$$

أو

$$\left(x^3 + y^3\right)dx - xy^2 dy = 0$$

هذه معادلة متجانسة، نضع

$$x = vy \quad , \quad dx = vdy + ydv$$

إذاً

$$\left((vy)^3 + y^3\right)(vdy + ydv) - (vy)y^2 dy = 0$$

بفرض أن $y \neq 0$، إذاً

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\left(v^3 + 1\right)}{v^4} dv$$

وبإجراء عملية التكامل، إذاً

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{v^4} + C$$

الحل العام هو

$$\ln|y| = -\ln|v| + \frac{1}{3v^3} + C$$

وبالتعويض عن $v = \frac{x}{y}$، إذاً

$$\ln|y| = -\ln\left|\frac{x}{y}\right| + \frac{1}{3\left(\frac{x}{y}\right)^3} + C \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + C$$

17

هذه معادلة متجانسة، نضع

$$x = vy \quad , \quad dx = vdy + ydv$$

إذاً

$$vy^2 dy = \left(v^2 y^2 + y^2\right)\left(vdy + ydv\right)$$

أو

$$y^2\left[-v^3 dy - y\left(v^2 + 1\right)dv\right] = 0$$

بفرض أن $y \neq 0$، إذاً

$$\left[-v^3 dy - y\left(v^2+1\right)dv\right]=0$$

بفصل المتغيرات، نحصل على

$$\frac{dy}{y}=\frac{-\left(v^2+1\right)}{v^3}dv$$

وبإجراء عملية التكامل، إذاً

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dv}{v}-\int\frac{dv}{v^3}+C$$

الحل العام هو

$$\ln|y|=-\ln|v|+\frac{1}{2v^2}+C$$

وبالتعويض عن $v=\frac{x}{y}$، إذاً

$$\ln|y|=-\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+C \;\Rightarrow\; 2\ln|x|=\left(\frac{y}{x}\right)^2+C$$

19

هذه معادلة شبه متجانسة، وبما أن

$$a_1b_2-a_2b_1=3\neq 0$$

إذاً نستخدم التعويض

$$x = X + a \ , \ y = Y + b \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

إذاً

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - 3Y + a - 3b - 7}{X + a - 4}$$

ولكي تكون هذه المعادلة متجانسة فيجب أن يكون

$$a - 3b - 7 = 0, \quad a - 4 = 0 \ \Rightarrow \ a = 4 \ , \ b = -1$$

أي أنه يجب استخدام التعويض

$$x = X + 4 \ , \ y = Y - 1$$

وهكذا تتحول المعادلة المعطاة إلى المعادلة المتجانسة

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - 3Y}{X} \ \rightarrow \ XdY - (X - 3Y)dX = 0$$

ولأن هذه الأخيرة معادلة متجانسة، نضع

$$Y = vX \ \rightarrow \ \frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} \ \rightarrow \ dY = (vdX + Xdv)$$

إذاً

$$X(vdX + Xdv) - (X - 3vX)dX = 0$$

أو

$$X^2 dv = X(1 - 4v)dX \ \rightarrow \ \frac{dv}{1 - 4v} = \frac{dX}{X}$$

وبالتكامل، إذاً

$$\ln|X| = -\frac{1}{4}\ln|1 - 4v| + C$$

وبما أن

$$X = x - 4 \quad , \; Y = y + 1 \; , \; v = \frac{Y}{X} = \frac{y+1}{x-4}$$

إذاً

$$\ln|x-4| = -\frac{1}{4}\ln\left|1 - 4\frac{y+1}{x-4}\right| + C$$

21

هذه معادلة شبه متجانسة، وبما أن

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 4 \neq 0$$

إذاً نستخدم التعويض

$$x = X + a \; , \; y = Y + b \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

فتصبح المعادلة على الشكل

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X - Y + 3a - b - 9}{X + a + Y + b + 1}$$

ولكي تكون هذه معادلة متجانسة فيجب أن يكون

$$3a - b - 9 = 0, \quad a + b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \; , \; b = -3$$

أو

$$x = X + 2 \; , \; y = Y - 3$$

فتتحول المعادلة إلى المعادلة المتجانسة

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3X - Y}{X + Y} \quad \rightarrow \quad (X + Y)dY - (3X - Y)dX = 0$$

نضع

$$Y = vX \quad , \quad dY = (vdX + Xdv)$$

فتأخذ المعادلة الشكل

$$(X + vX)(vdX + Xdv) - (3X - vX)dX = 0$$

وبترتيب حدود هذه المعادلة، نحصل على

$$X^2(1+v)dv = X\left(-v^2 - 2v + 3\right)dX$$

أو

$$\frac{(1+v)dv}{-v^2 - 2v + 3} = \frac{dX}{X}$$

وبالتكامل، إذاً

$$\ln|X| = -\frac{1}{2}\ln\left|-v^2 - 2v + 3\right| + C$$

وبالعودة إلى التعويضات

$$X = x - 2 \quad , \quad Y = y + 3 \quad , \quad v = \frac{Y}{X} = \frac{y+3}{x-2}$$

إذاً

$$\ln|x-2| = -\frac{1}{2}\ln\left|-\left(\frac{y+3}{x-2}\right)^2 - 2\frac{y+3}{x-2} + 3\right| + C$$

أو

$$\frac{1}{2}\ln\left|3(x-2)^2 - 2(x-2)(y+3) - (y+3)^2\right| = C$$

23

هذه معادلة شبه متجانسة، وبما أن

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \neq 0$$

إذاً نستخدم التعويض

$$x = X + a \ , \ y = Y + b \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

إذاً

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y + a - b + 2}{X + a + Y + b - 3}$$

ولكي تكون هذه المعادلة متجانسة فيجب أن يكون

$$\left.\begin{aligned} a - b + 2 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ a = \frac{1}{2} \ , \ b = \frac{5}{2}$$

أي أنه يجب استخدام التعويض

$$x = X + \frac{1}{2} \ , \ y = Y + \frac{5}{2}$$

وهكذا تتحول المعادلة المعطاة إلى المعادلة المتجانسة

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} \ \rightarrow \ (X + Y)dY - (X - Y)dX = 0$$

ولأن هذه الأخيرة معادلة متجانسة، نضع

$$Y = vX \ , \ dY = (vdX + Xdv)$$

فتصبح المعادلة على الشكل

$$(X + vX)(vdX + Xdv) - (X - vX)dX = 0$$

أو

$$\frac{(1+v)dv}{1-2v-v^2}=\frac{dX}{X}$$

وبالتكامل، إذاً

$$\ln|X|=-\frac{1}{2}\ln\left|1-2v-v^2\right|+C$$

وبالعودة إلى التعويضات

$$X=x-\frac{1}{2}\ ,\ Y=y-\frac{5}{2},\ v=\frac{Y}{X}=\frac{y-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}$$

فإن الحل العام يصبح

$$\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|1-2\frac{y-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}-\left(\frac{y-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)^2\right|+C$$

أو

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{5}{2}\right)-\left(y-\frac{5}{2}\right)^2\right|=C$$

25

يمكن إعادة كتابة هذه المسألة على الشكل

$$(\cos(xy)-xy\sin(xy))dx+\left(-x^2\sin(xy)+2y\right)dy=0$$

بوضع

$$P(x,y)=\cos(xy)-xy\sin(xy);$$

$$Q(x,y) = -x^2 \sin(xy) + 2y$$

نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy) - xy\sin(xy)\right)$$

$$= -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 \sin(xy) + 2y\right)$$

$$= -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy)$$

أي أن

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)$$

إذاً المعادلة المعطاة هي معادلة مضبوطة ويكون أن حلها هو $\phi(x,y) = C$، حيث الدالة $\phi(x,y)$ هي دالة الجهد. وبما أن

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) \to -x^2\sin(xy) + 2y = \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى المتغير y وباعتبار أن المتغير x ثابت، نجد أن

$$\phi(x,y) = \int\left(-x^2\sin(xy) + 2y\right)dy = x\cos(xy) + y^2 + c(x)$$

حيث $c(x)$ هو ثابت التكامل. للحصول على هذا الثابت، نستخدم الدالة

$$P(x,y) = \left(\cos(xy) - xy\sin(xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos(xy) + y^2 + c(x)\right)$$

$$= -xy\sin(xy) + \cos(xy) + c'(x)$$

بمقارنة طرفي المعادلة نجد أن

$$c'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad c(x) = 0$$

إذا

$$\phi(x, y) = x\cos(xy) + y^2$$

الحل العام هو

$$x\cos(xy) + y^2 = C$$

27

يمكن إعادة كتابة هذه المسألة على الشكل

$$\left(-8x + ye^{xy}\right)dx + \left(2y + xe^{xy}\right)dy = 0$$

بوضع

$$P(x, y) = \left(-8x + ye^{xy}\right), \quad Q(x, y) = \left(2y + xe^{xy}\right)$$

نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y)$$

إذاً المعادلة المعطاة هي معادلة مضبوطة، وحلها هو $\phi(x, y) = C$، حيث $\phi(x, y)$ هي دالة الجهد. بما أن

$$Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y) \rightarrow \left(2y + xe^{xy}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى المتغير y واعتبار أن المتغير x ثابت، نجد أن

$$\phi(x,y)=\int\left(2y+xe^{xy}\right)dy+c(x)=e^{xy}+y^2+c(x)$$

حيث $c(x)$ هو ثابت التكامل. للحصول على هذا الثابت، نستخدم المعادلة

$$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)$$

إذاً

$$\left(-8x+ye^{xy}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}+y^2+c(x)\right)=ye^{xy}+c'(x)$$

بمقارنة طرفي المعادلة نجد أن

$$c'(x)=-8x \quad\rightarrow\quad c(x)=-\int 8x\,dx=-4x^2$$

إذاً

$$\phi(x,y)=e^{xy}+y^2-4x^2$$

الحل العام هو

$$e^{xy}+y^2-4x^2=C$$

29

نفرض

$$P(x,y)=y^3,\quad Q(x,y)=\left(3xy^2-1\right)$$

وبما أن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=3y^2=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

وبما أن

$$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) \;\rightarrow\; y^3=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)$$

إذاً

$$\phi(x,y)=\int y^3dx=xy^3+c(y)$$

وحيث أن

$$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)$$

إذاً

$$\left(3xy^2-1\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^3+c(y)\right)=3xy^2+c'(y)$$

فنجد أن

$$c'(y)=-1 \;\rightarrow\; \int c'(y)dy=-\int dy \;\rightarrow\; c(y)=-y$$

أي أن

$$\phi(x,y)=xy^3-y$$

الحل العام هو

$$xy^3-y=C$$

31

نفرض

$$P(x,y)=(3yx+y+4),\quad Q(x,y)=\frac{1}{2}x$$

بما أن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=3x+1\neq\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)=\frac{1}{2}$$

إذاً المعادلة المعطاة ليست معادلة مضبوطة وعلينا أن نبحث (إن وجد) عن معامل تكاملي *(Integrating Factor)* وذلك لجعلها مضبوطة. ولنفرض أننا نبحث عن معامل تكاملي كدالة في x فقط أي $\mu(x)$. نستخدم المعادلة

$$\frac{1}{\frac{1}{2}x}\left(3x+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x} \quad\rightarrow\quad \left(6+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{d\mu}{\mu}$$

بالتكامل نجد أن

$$6x+\ln x=\ln\mu \quad\rightarrow\quad \mu=e^{6x+\ln x}=xe^{6x}$$

إذاً المعامل التكاملي المطلوب هو $\mu(x)=xe^{6x}$ وبضربه في المعادلة الأصلية المعطاة نحصل على المعادلة المضبوطة

$$(3yx+y+4)xe^{6x}dx+\frac{1}{2}x^2e^{6x}dy=0$$

وذلك لأن

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2e^{6x}+xe^{6x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

إذاً نبحث عن الدالة $\phi(x,y)$ من تكامل المعادلة

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{1}{2}x^2e^{6x}$$

إذاً

$$\phi=\frac{1}{2}\int x^2e^{6x}dy+c(x)=\frac{1}{2}x^2e^{6x}y+c(x)$$

وبما أن

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2e^{6x}y+c(x)\right)=xye^{6x}+3x^2ye^{6x}+c'(x)$$

$$=P(x,y)=xye^{6x}+3x^2ye^{6x}+4xe^{6x}$$

وبمقارنة طرفي المعادلة نجد أن

$$c'(x)=4xe^{6x}$$

أو

$$c(x)=\int 4xe^{6x}dx=\frac{2}{3}xe^{6x}-\frac{1}{9}e^{6x}$$

إذاً

$$\phi=\frac{1}{2}x^2e^{6x}y+\frac{2}{3}xe^{6x}-\frac{1}{9}e^{6x}$$

والحل العام هو

$$\frac{1}{2}x^2e^{6x}y+\frac{2}{3}xe^{6x}-\frac{1}{9}e^{6x}=C$$

33

نفرض

$$P(x,y)=3yx^2,\ Q(x,y)=\left(2x^3-2\right)$$

بما أن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=3x^2\neq\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)=6x^2$$

إذاً المعادلة المعطاة ليست معادلة مضبوطة وعلينا أن نبحث عن معامل تكاملي (إن وجد) وذلك لجعلها مضبوطة. لنفرض أننا نبحث عن معامل تكاملي كدالة في y فقط أي $\mu(y)$، نستخدم المعادلة

$$\frac{1}{3x^2y}\left(6x^2-3x^2\right)=\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} \quad \to \quad \frac{dy}{y}=\frac{d\mu}{\mu}$$

بالتكامل نجد أن

$$\ln y=\ln \mu \quad \to \quad \mu=y$$

إذاً المعامل التكاملي المطلوب هو $\mu(y)=y$ وبضربه في المعادلة الأصلية المعطاة نحصل على المعادلة المضبوطة

$$3y^2x^2dx+y\left(2x^3-2\right)dy=0$$

حيث يمكن التأكد من أن

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6yx^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

إذاً نبحث عن الدالة $\phi(x,y)$ من المعادلة

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}=P(x,y)=3y^2x^2$$

وبالتالي فإن

$$\phi=\int 3y^2x^2dx+c(y)=x^3y^2+c(y)$$

وبما أن $\frac{\partial \phi}{\partial y}=Q(x,y)$، إذاً

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2+c(y)\right)=2x^3y+c'(x)$$

$$=Q(x,y)=2x^3y-2y$$

وبمقارنة طرفي المعادلة نجد أن

$$c'(y) = -2y$$

إذاً الثابت هو

$$c(y) = -2\int y dy = -y^2$$

إذاً

$$\phi = x^3 y^2 - y^2$$

والحل العام هو

$$x^3 y^2 - y^2 = C$$

35

بما أن

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = 2y \neq \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) = 0$$

نبحث عن المعامل التكاملي $\mu(x)$ من المعادلة

$$\frac{1}{2y}(2y - 0) = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{d\mu}{\mu}$$

حيث نجد أن

$$x = \ln \mu \quad \rightarrow \quad \mu = e^x$$

وتصبح المعادلة

$$\left(1 + x + y^2\right)e^x dx + 2ye^x dy = 0$$

معادلة مضبوطة، إذاً

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2ye^x \quad \rightarrow \quad \phi = \int 2ye^x dy = y^2 e^x + c(x)$$

ولكن

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2e^x+c(x)\right)=y^2e^x+c'(x)$$

$$=e^x+xe^x+y^2e^x$$

إذاً

$$c'(x)=e^x+xe^x \ \rightarrow \ c(x)=\int\left(e^x+xe^x\right)dx=xe^x$$

وبالتالي فإن

$$\phi=y^2e^x+xe^x$$

والحل العام هو

$$y^2e^x+xe^x=C$$

37

هذه معادلة خطية، وبما أن

$$Q(x)=-\frac{1}{x} \ , \ R(x)=x^2+2$$

إذاً الحل العام هو

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}\times\int\left(x^2+2\right)e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+Ce^{\int\frac{dx}{x}}$$

ولكن

$$e^{\ln x}=x \ \ and \ \ e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

إذاً

$$y=x\times\int\frac{x^2+2}{x}dx+Cx=\frac{x^3}{2}+2x\ln x+Cx$$

39

نعيد كتابة المعادلة لتصبح على الشكل

$$y' + \frac{3}{2}y = \frac{e^{2x}}{2}$$

هذه معادلة خطية، فيها

$$Q(x) = \frac{3}{2},\ R(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

إذاً الحل العام هو

$$y = e^{-\frac{3}{2}\int dx} \times \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot e^{\frac{3}{2}\int dx} dx + Ce^{-\frac{3}{2}\int dx}$$

أو

$$y = e^{-\frac{3}{2}x} \times \int \frac{1}{2} e^{\frac{7}{2}x} dx + Ce^{-\frac{3}{2}x} = \frac{e^{2x}}{7} + Ce^{-\frac{3}{2}x}$$

41

نعيد كتابة المعادلة لتصبح على الشكل

$$y' + \frac{2\sin^2(x)}{\sin(2x)}y = \frac{2\sin(x)}{\sin(2x)}$$

هذه معادلة خطية، فيها

$$Q(x) = \frac{2\sin^2(x)}{\sin(2x)} = \tan(x),\ R(x) = \frac{2\sin(x)}{\sin(2x)} = \sec(x)$$

إذاً الحل العام هو

$$y = e^{-\int \tan(x)dx} \times \int \sec(x) e^{\int \tan(x)dx} dx + Ce^{-\int \tan(x)dx}$$

ولكن

$$e^{\ln|\sec(x)|} = \sec(x) \quad and \quad e^{-\ln|\sec(x)|} = \frac{1}{\sec(x)} = \cos(x)$$

إذاً

$$y = \cos(x) \int \sec^2(x)dx + C\cos(x) = \cos(x)\tan(x) + C\cos(x)$$

أو

$$y = \sin(x) + C\cos(x)$$

43

نعيد كتابة المعادلة لتصبح على الشكل

$$xy' - 18y = 4x^2y^2$$

هذه معادلة برنولي *(Bernoulli Equation)*، فيها

$$P(x,y) = x \ , \ Q(x,y) = -18 \ , \ R(x) = 4x^2 \ , \ \alpha = 2$$

للحصول على المعامل التكاملي، لدينا

$$\mu(x,y) = \frac{1}{y^{\alpha}P(x)} e^{(1-\alpha)\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx}$$

$$= \frac{1}{xy^2} e^{-\int \frac{(-18)}{x}dx} = \frac{x^{17}}{y^2}$$

إذاً بضرب المعادلة المعطاة في المعامل $\mu(x,y)=\dfrac{x^{17}}{y^2}$، والترتيب نحصل على المعادلة المضبوطة

$$\left(-\frac{18x^{17}}{y}-4x^{19}\right)dx+\frac{x^{18}}{y^2}dy=0$$

حيث نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{18x^{17}}{y}-4x^{19}\right)=\frac{18x^{17}}{y^2}=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

بما أن

$$Q(x,y)=\frac{x^{18}}{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)$$

إذاً

$$\phi(x,y)=\int\frac{x^{18}}{y^2}dy=-\frac{x^{18}}{y}+c(x)$$

ولكن

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^{18}}{y}+c(x)\right)=-\frac{18x^{17}}{y}+c'(x)$$

$$=-\frac{18x^{17}}{y}-4x^{19}$$

إذاً

$$c'(x)=-4x^{19}\rightarrow\ c(x)=\int-4x^{19}dx=-\frac{x^{20}}{5}$$

ومن ثم فإن

$$\phi(x,y) = -\frac{x^{18}}{y} - \frac{x^{20}}{5}$$

إذاً الحل العام هو

$$-\frac{x^{18}}{y} - \frac{x^{20}}{5} = C$$

45

نعيد كتابة المعادلة لتصبح على الشكل

$$x^2 y' - 2xy = 3y^3$$

هذه معادلة برنولى، فيها

$$P(x,y) = x^2 \ , \ Q(x,y) = -2x \ , \ R(x) = 3 \ , \ \alpha = 3$$

للحصول على المعامل التكاملي، لدينا

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2 y^3} e^{-2\int \frac{(-2x)}{x^2} dx} = \frac{1}{x^2 y^3} e^{4 \ln x} = \frac{x^2}{y^3}$$

إذاً، وبضرب المعادلة المعطاة في المعامل $\mu(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$،

والترتيب نحصل على المعادلة المضبوطة

$$\left(-\frac{2x^3}{y^2} - 3x^2\right)dx + \frac{x^4}{y^3} dy = 0$$

حيث نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{4x^3}{y^3} = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)$$

بما أن

$$Q(x,y)=\frac{x^4}{y^3}=\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}$$

إذاً

$$\phi=\int \frac{x^4}{y^3}\,dy=-\frac{x^4}{2y^2}+c(x)$$

وحيث أن

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^4}{2y^2}+c(x)\right)=-\frac{2x^3}{y^2}+c'(x)$$

$$=P(x,y)=-\frac{2x^3}{y^2}-3x^2$$

إذاً

$$c'(x)=-3x^2 \;\rightarrow\; c(x)=\int -3x^2dx=-x^3$$

ومن ثم فإن

$$\phi=-\frac{x^4}{2y^2}-x^3$$

إذاً الحل العام هو

$$-\frac{x^4}{2y^2}-x^3=C$$

47

هذه معادلة ريكاتي *(Riccati Equation)*، حيث نجد أن

$$P(x)=Q(x)=\frac{1}{x}\quad,\quad R(x)=-\frac{2}{x}$$

ويمكن التأكد أن $s(x)=1$ هو حل خاص لهذه المعادلة، إذاً الحل العام هو

$$y = s(x) + \frac{1}{z(x)} = 1 + \frac{1}{z(x)}$$

وللحصول على $z(x)$ نوجد حل المعادلة الخطية

$$z' + \frac{3}{x} z = -\frac{1}{x}$$

حيث نجد أن الحل العام لها هو

$$z = e^{-3\int \frac{dx}{x}} \cdot \int \left(-\frac{1}{x}\right) e^{3\int \frac{dx}{x}} dx + C e^{-3\int \frac{dx}{x}} = -\frac{1}{3} + \frac{C}{x^3}$$

إذاً الحل العام لمعادلة ريكاتي هو

$$y = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{C}{x^3}} = \frac{2x^3 + 3C}{-x^3 + 3C}$$

49

هذه معادلة ريكاتي حيث نجد أن

$$P(x) = \frac{1}{x} \ , \ Q(x) = x \ , \ R(x) = 2x\left(1 - x^2\right)$$

ويمكن التأكد أن $s(x) = x^2$ هو حل خاص لهذه المعادلة، إذاً الحل العام هو

$$y = s(x) + \frac{1}{z} = x^2 + \frac{1}{z}$$

وللحصول على $z(x)$ نوجد حل المعادلة الخطية

$$z' + 3xz = -\frac{1}{x}$$

حيث نجد أن الحل العام لها هو

$$z = e^{-\frac{3x^2}{2}} \int \left(-\frac{1}{x}\right) e^{\frac{3x^2}{2}} dx + Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$$

إذاً الحل العام لمعادلة ريكاتي هو

$$y = x^2 + \left[e^{-\frac{3x^2}{2}} \int \left(-\frac{1}{x}\right) e^{\frac{3x^2}{2}} dx + Ce^{-\frac{3x^2}{2}} \right]^{-1}$$

51

بما أن

$$f(x,y) = x - y^2, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -2y$$

وبما أن

$$a = b = 1$$

إذاً

$$\Omega = \{(x,y);\ |x-0| \le 1, |y-0| \le 1\}$$

أو

$$\Omega = \{(x,y);\ |x| \le 1, |y| \le 1\}$$

وبالتالي فإن الدالتين $f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ متصلتان في المربع Ω وبالتالي فإن المسألة المعطاة تحقق شروط نظرية بيكارد وعليه يوجد لها حل وحيد في الفترة $[x_0 - h, x_0 + h]$. ولمعرفة h لدينا من (1.39)

$$M = \max_{(x,y)\in\Omega} |f(x,y)| = \max_{|x|\leq 1, |y\leq 1|} |x - y^2| = 2$$

وبالتالي فإن

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

إذاً حل المسألة الابتدائية المعطاة موجود لكل x ينتمي إلى الفترة $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. أيضاً بما أن $y(0) = 0$. إذاً فإن $x_0 = 0, y_0 = 0$.
وباستخدام تكنيك بيكارد، نجد من (1.42) أن

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x f(x,0)dx$$

وبما أن

$$f(x,y) = x - y^2 \rightarrow f(x,0) = x$$

إذاً

$$y_1(x) = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}$$

ومن (1.43) نجد أن

$$y_2(x) = \int_0^x f\left(x, \frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^x \left(x - \frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$$

ومن (1.44)، نستمر في الحصول على $y_3(x), y_4(x), \ldots$ حتى نحصل على $y_n(x)$ المطلوبة ويكون عندئذٍ الحل المطلوب هو

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

لاحظ في هذا المثال أنه من الصعب معرفة شكل صريح أو عام للحل التكراري $y_n(x)$ وعلى ذلك ُيكتفى بأي حل تكراري يتم فيه اختيار قيمة معينة للعدد n.

****

1

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد ــ أولاً ــ الحل المكمل y_c. المعادلة المميزة تعطي

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \to \quad r_1 = 2,\ r_2 = -1$$

وبما أن الجذرين حقيقيان ومختلفان، إذاً طبقاً للصورة (2.22)، فإن الحل المكمل هو

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة المعطاة نستخدم طريقة مقارنة المعاملات. بما أن $G(x) = 2x^2 + 5$، إذاً نفرض الحل الخاص على الشكل $y_p = ax^2 + bx + c$ بالتفاضل نجد أن

$$y_p' = 2ax + b,\ y_p'' = 2a$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة عن نحصل على

$$2a - 2ax - b - 2\left(ax^2 + bx + c\right) = 2x^2 + 5$$

وبمقارنة المعاملات في الطرفين نجد أن

$$-2a = 2,\ \ -2a - 2b = 0,\ \ 2a - b - 2c = 5$$

$$a = -1,\ b = 1,\ c = -4$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = -x^2 + x - 4$$

ويكون أن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة المعطاة هو مجموع الحلين، المكمل للمعادلة المتجانسة المقابلة، والحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة. إذاً الحل العام هو

$$y_g = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - x^2 + x - 4$$

3

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' + 4y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي

$$r^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = 0 \pm 2i$$

ولأن الجذرين تخيليان نستخدم الصورة (2.37)، فنحصل على الحل المكمل في الشكل

$$y_c = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة نستخدم طريقة مقارنة المعاملات. بما أن $G(x) = 8x^3 - 20x^2 + 16x - 18$ إذاً نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

بالتفاضل نجد أن

$$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y_p'' = 6ax + 2b$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$6ax + 2b + 4\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = 8x^3 - 20x^2 + 16x - 18$$

وبمقارنة المعاملات في الطرفين نجد أن

$$4a = 8 \ , \ 4b = -20 \ , \ 6a + 4c = 16 \ , \ 2b + 4d = -18$$

إذاً

$$a = 2 \ , \ b = -5 \ , \ c = 1 \ , \ d = -2$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = 2x^3 - 5x^2 + x - 2$$

والحل العام هو

$$y_g = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + 2x^3 - 5x^2 + x - 2$$

5

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' - 6y' + 8y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي

$$r^2 - 6r + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad r_1 = 4, \ r_2 = 2$$

إذاً

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة نستخدم طريقة مقارنة المعاملات. بما أن $G(x) = 3e^{x}$، نفرض الحل الخاص على الشكل $y_p = ae^{x}$. بالتفاضل نجد أن

$$y_p{}' = ae^{x}, \ \ y_p{}'' = ae^{x}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$ae^{x} - 6ae^{x} + 8ae^{x} = 3e^{x}$$

وبمقارنة معاملات e^{x} في الطرفين نجد أن

$$3a = 3 \ \rightarrow \ a = 1$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = e^{x}$$

والحل العام هو

$$y_g = c_1e^{2x} + c_2e^{4x} + e^{x}$$

7

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' - 3y' + 2y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \ \rightarrow \ r_1 = 1 \ , \ r_2 = 2$$

إذاً

$$y_c = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة نستخدم طريقة مقارنة المعاملات. بما أن $G(x) = 10\sin(x)$ ، إذاً نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = a\sin(x) + b\cos(x)$$

بالتفاضل نجد أن

$$y_p' = a\cos(x) - b\sin(x),\ y_p'' = -a\sin(x) - b\cos(x)$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$(-a\sin(x) - b\cos(x)) - 3(a\cos(x) - b\sin(x))$$

$$+2(a\sin(x) + b\cos(x)) = 10\sin(x)$$

وبعد الاختصار

$$(3b + a)\sin(x) + (b - 3a)\cos(x) = 10\sin(x)$$

وبمقارنة معاملات $\sin(x),\ \cos(x)$ في الطرفين نجد أن

$$b - 3a = 0 \ ,\ 3b + a = 10 \ \rightarrow\ a = 1\ ,\ b = 3$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \sin(x) + 3\cos(x)$$

والحل العام هو

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \sin(x) + 3\cos(x)$$

9

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' - 4y' + 13y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي

$$r^2 - 4r + 13 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = 2 \pm 3i$$

إذاً

$$y_c = c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \sin(3x)$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة نستخدم طريقة مقارنة المعاملات. بما أن $G(x) = 3e^{2x} - 5e^{3x}$، إذاً نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = ae^{2x} + be^{3x}$$

بالتفاضل نجد أن

$$y_p' = 2ae^{2x} + 3be^{3x}, \; y_p'' = 4ae^{2x} + 9be^{3x}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$4ae^{2x} + 9be^{3x} - 4\left(2ae^{2x} + 3be^{3x}\right) + 13\left(ae^{2x} + be^{3x}\right)$$

$$= 3e^{2x} - 5e^{3x}$$

وبمقارنة معاملات e^{2x}, e^{3x} في الطرفين نجد أن

$$9a = 3 \;,\; 10b = -5 \;\rightarrow\; a = \frac{1}{3} \;,\; b = -\frac{1}{2}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{3x}$$

و الحل العام هو

$$y_g = c_1 e^{2x}\cos(3x) + c_2 e^{2x}\sin(3x) + \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{3x}$$

11

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' + 4y' = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة هي

$$r^2 + 4r = 0 \quad \to \quad r_1 = 0,\ r_2 = -4$$

إذاً

$$y_c = c_1 + c_2 e^{-4x}$$

للحصول على الحل الخاص نستخدم طريقة مقارنة المعاملات. وبما أن $G(x) = -3\cos(3x) + \sin(2x)$، إذاً نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = a\sin(3x) + b\cos(3x) + c\sin(2x) + d\cos(2x)$$

بالتفاضل نجد أن

$$y_p' = 3a\cos(3x) - 3b\sin(3x) + 2c\cos(2x) - 2d\sin(2x)$$

كما نجد

$$y_p'' = -9a\sin(3x) - 9b\cos(3x) - 4c\sin(2x) - 4d\cos(2x)$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$-9a\sin(3x) - 9b\cos(3x) - 4c\sin(2x) - 4d\cos(2x)$$

$$+4(3a\cos(3x) - 3b\sin(3x) + 2c\cos(2x) - 2d\sin(2x))$$

$$= -3\cos(3x) + \sin(2x)$$

وبمقارنة معاملات كل من

$$\cos(2x), \sin(2x), \sin(3x), \cos(3x)$$

في الطرفين نجد أن

$$-9b + 12a = -3\ ,\quad -9a - 12b = 0,$$

$$-4c - 8d = 1\ ,\quad -4d + 8c = 0$$

وبالتالي فإن

$$a = -\frac{4}{25}\ ,\ b = \frac{3}{25}\ ,\ c = -\frac{1}{20}\ ,\ d = -\frac{1}{10}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = -\frac{4}{25}\sin(3x) + \frac{3}{25}\cos(3x) - \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{1}{10}\cos(2x)$$

والحل العام هو

$$y_g = c_1 + c_2 e^{-4x} - \frac{4}{25}\sin(3x)$$

$$+\frac{3}{25}\cos(3x)-\frac{1}{20}\sin(2x)-\frac{1}{10}\cos(2x)$$

13

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات متغيرة وليست ثوابت. وحيث أن المتغير y لم يظهر، إذاً نحاول اختزال الرتبة باستخدام التعويضات $p=\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$ في المعادلة فنحصل على

$$x\frac{dp}{dx}=2+p\ \Rightarrow \frac{dp}{p+2}=\frac{dx}{x}$$

بالتكامل نجد أن

$$\ln|p+2|=\ln x+\ln C_1\ \Rightarrow\ p=C_1x-2$$

وبالعودة إلى التعويض $p=\frac{dy}{dx}$، نجد أن

$$\frac{dy}{dx}=C_1x-2\ \Rightarrow\ dy=(C_1x-2)dx$$

وبالتكامل، إذاً

$$\int dy=\int(C_1x-2)dx+C_2$$

إذاً الحل العام هو

$$y=C_1\frac{x^2}{2}-2x+C_2$$

15

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات متغيرة وليست ثوابت. وحيث أن المتغير x لم يظهر، إذاً نحاول اختزال الرتبة باستخدام التعويضات $p=\dfrac{dy}{dx}$ ، $\dfrac{d^2y}{dx^2}=p\dfrac{dp}{dy}$ في المعادلة فنحصل على

$$2p\frac{dp}{dy}=1+y \;\Rightarrow\; 2p\,dp=(1+y)dy$$

وبفصل المتغيرات والتكامل، إذاً

$$p^2=y+\frac{y^2}{2}+C_1 \quad\Rightarrow p=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y^2+2y+2C_1}$$

وبالعودة إلى التعويض $p=\dfrac{dy}{dx}$ ، وبفصل المتغيرات، إذاً نجد أن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y^2+2y+2C_1}\Rightarrow\sqrt{2}\frac{dy}{\sqrt{y^2+2y+2C_1}}=dx$$

وبالتكامل، إذاً

$$x+C_2=\sqrt{2}\ln\left|\sqrt{y^2+2y+2C_1}+y+1\right|$$

17

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y''-4y=0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \; , \; r_2 = -2$$

إذاً

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

للحصول على الحل الخاص نستخدم طريقة تغيير البارامترات وذلك لأن $G(x) = 5\sinh(2x)$ غير موجودة بجدول (2.1). نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x)$$

حيث

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

وبالتالي فإن

$$u(x) = \int \frac{-y_2(x) G(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-e^{-2x}(5\sinh(2x))}{-4} dx$$

$$= \frac{5}{8} \int \left(1 - e^{-4x}\right) dx = \frac{5}{8}\left(x + \frac{1}{4} e^{-4x}\right)$$

كما أن

$$v(x) = \int \frac{y_1(x) G(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{e^{2x}(5\sinh(2x))}{-4} dx$$

$$= -\frac{5}{8} \int \left(e^{4x} - 1\right) dx = -\frac{5}{8}\left(\frac{1}{4} e^{4x} - 1\right)$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{4}e^{-4x}\right)e^{2x} - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{4}e^{4x} - x\right)e^{-2x}$$

$$= \frac{5}{4}x\cosh(2x) - \frac{5}{16}\cosh(2x) = \frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right)\cosh(2x)$$

و الحل العام هو

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right)\cosh(2x)$$

19

المعادلة المميزة تُعطي

$$r^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm 3i$$

إذاً

$$y_c = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$$

للحصول على الحل الخاص نستخدم طريقة تغيير البارامترات وذلك لأن $G(x) = 3\sec(x)$. نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

حيث

$$y_1(x) = \cos(3x), \quad y_2(x) = \sin(3x)$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3$$

إذاً نجد أن

$$u(x)=\int \frac{-\sin(3x)(3\sec(3x))}{3}\,dx=-\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)|$$

وأن

$$v(x)=\int \frac{\cos(3x)(3\sec(3x))}{3}\,dx=\int dx=x$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p=x\sin(3x)-\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)|\cos(3x)$$

و الحل العام هو

$$y_g=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)$$

$$+x\sin(3x)-\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)|\cos(3x)$$

21

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد ـ أولاً ـ الحل المكمل، y_c والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y''-3y'+2y=0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^2-3r+2=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=2\ ,\ r_2=1$$

إذاً

$$y_c=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$$

للحصول على الحل الخاص نستخدم طريقة تغيير البارامترات.
نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) = u(x)e^{2x} + v(x)e^x$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^x \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = -e^{3x}$$

إذاً فإن

$$u(x) = \int \frac{-e^x \cos(e^{-x})}{-e^{3x}} dx = -e^{-x} \sin(e^{-x}) - \cos(e^{-x})$$

كما أن

$$v(x) = \int \frac{e^{2x} \cos(e^{-x})}{-e^{3x}} dx = \sin(e^{-x})$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \left(-e^{-x} \sin(e^{-x}) - \cos(e^{-x})\right)e^{2x} + e^x \sin(e^{-x})$$
$$= -e^{2x} \cos(e^{-x})$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - e^{2x} \cos(e^{-x})$$

23

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذى هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' - y' - 12y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^2 - r - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4 \ , \ r_2 = -3$$

إذاً

$$y_c = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x}$$

للحصول على الحل الخاص نستخدم طريقة تغيير البارامترات.
نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x) = u(x) e^{4x} + v(x) e^{-3x}$$

بما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{4x} & e^{-3x} \\ 4e^{4x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -7e^{x}$$

إذاً نجد أن

$$u(x) = \int \frac{-e^{-3x} 2\sinh^2(x)}{-7e^{x}} dx = \frac{2}{7} \int e^{-4x} \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{14} \int \left(e^{-2x} - 2e^{-4x} + e^{-6x} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{28} e^{-2x} + \frac{1}{28} e^{-4x} - \frac{1}{84} e^{-6x}$$

وأيضاً

$$v(x) = \int \frac{e^{4x} 2\sinh^2(x)}{-7e^{x}} dx = -\frac{1}{70} e^{5x} + \frac{1}{21} e^{3x} - \frac{1}{14} e^{x}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \left(-\frac{1}{28} e^{-2x} + \frac{1}{28} e^{-4x} - \frac{1}{84} e^{-6x} \right) e^{4x}$$

$$+e^{-3x}\left(-\frac{1}{70}e^{5x}+\frac{1}{21}e^{3x}-\frac{1}{14}e^{x}\right)=-\frac{e^{2x}}{20}+\frac{1}{12}\left(1-e^{-2x}\right)$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g=C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}-\frac{1}{20}e^{2x}+\frac{1}{12}\left(1-e^{-2x}\right)$$

25

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y''-5y'+6y=0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^2-5r+6=0 \quad\Rightarrow\quad r_1=2\ ,\ r_2=3$$

إذاً

$$y_c=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

الحل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{D^2-5D+6}e^{2x}x^3=\frac{e^{2x}}{(D+2)^2-5(D+2)+6}x^3$$

$$=\frac{e^{2x}}{D^2-D}x^3=e^{2x}\frac{(-1)}{D(1-D)}x^3$$

$$=e^{2x}\frac{(-1)}{D}\left(1+D+D^2+\cdots\right)x^3$$

$$=-e^{2x}\frac{1}{D}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)$$

$$= -e^{2x}\left(\frac{x^4}{4} + x^3 + 3x^2 + 6x + C_3\right)$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - e^{2x}\left(\frac{x^4}{4} + x^3 + 3x^2 + 6x + C_3\right)$$

27

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' - 4y' + 3y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1 \ , \ r_2 = 3$$

إذاً

$$y_c = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4D + 3}x^3 = \frac{1}{(D-1)(D-3)}x^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-D}\cdot\frac{1}{1-\frac{D}{3}}\right)x^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-D}\cdot\left(1 + \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9} + \cdots\right)\right)x^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + D + D^2 + D^3 + \cdots\right)\left(x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{6}{27}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} + 3x^2 + 2x + \frac{2}{3} + 6x + 2 + 6\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 + 4x^2 + \frac{26}{3}x + \frac{80}{9}\right)$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}\left(x^3 + 4x^2 + \frac{26}{3}x + \frac{80}{9}\right)$$

29

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' - 6y' + 13y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^2 - 6r + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = 3 \pm 2i$$

إذاً

$$y_c = C_1 e^{3x}\cos(2x) + C_2 e^{3x}\sin(2x)$$

الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 6D + 13} e^{2x}\cos(2x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{(D+2)^2 - 6(D+2) + 13}\cos(2x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{D^2 - 2D + 5}\cos(2x) = \frac{e^{2x}}{-4 - 2D + 5}\cos(2x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{1 - 2D}\cos(2x) = \frac{e^{2x}(1 + 2D)}{1 - 4D^2}\cos(2x)$$

$$= \frac{e^{2x}(1 + 2D)}{1 - 4(-4)}\cos(2x) = \frac{e^{2x}(\cos(2x) + 2D\cos(2x))}{17}$$

$$= \frac{e^{2x}}{17}(\cos(2x) - 4\sin(2x))$$

إذاً

$$y_g = e^{3x}(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x))$$

$$+ \frac{e^{2x}}{17}(\cos(2x) - 4\sin(2x))$$

31

هذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $y'' + 9y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm 3i$$

إذاً

$$y_c = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$$

الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 9}\sin(3x)$$

وبما أنه يمكن اعتبار أن

$$\sin(3x) = I_m\left(e^{i(3x)}\right)$$

حيث يرمز I_m للجزء التخيلي من المقدار $e^{i(3x)}$، إذاً يمكن أن نجد أن

$$y_p = I_m\left[\frac{1}{D^2+9}e^{i(3x)}\right] = I_m\left[\frac{e^{(3i)x}}{(D+3i)^2+9}\cdot 1\right]$$

$$= I_m\left[\frac{e^{(3i)x}}{D^2+6iD}\cdot 1\right] = I_m\left[\frac{e^{(3i)x}}{6iD\left(1+\dfrac{D}{6i}\right)}\cdot 1\right]$$

$$= I_m\left[\frac{-ie^{(3i)x}}{6}\cdot\frac{1}{D}\left(1+\frac{D}{6i}\right)^{-1}\cdot 1\right]$$

$$= I_m\left[\frac{-i}{6}e^{(3i)x}\cdot\frac{1}{D}\cdot 1\right] = I_m\left[\frac{-i}{6}e^{(3x)i}\cdot\frac{1}{D}\cdot 1\right]$$

$$= I_m\left[\frac{-i}{6}(\cos(3x)+i\sin(3x))x\right] = \frac{-x}{6}\cos(3x)$$

$$y_g = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - \frac{x}{6}\cos(3x)$$

1

هذه معادلة أويلر الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $x^2y'' + 3xy' + y = 0$. المعادلة المميزة (3.7) لهذه المعادلة المتجانسة ُتعطي

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1 \ , \ r_2 = -1$$

إذاً نجد من (3.12) أن

$$y_c = x^{-1}\left(C_1 + C_2 \ln(x)\right)$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة المعطاة نستخدم فقط طريقة تغيير البارامترات. نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-1}\ln(x) \\ -\dfrac{1}{x^2} & \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^3}$$

إذاً فإن

$$y_1(x) = x^{-1}, \quad y_2(x) = x^{-1}\ln(x)$$

ويأخذ الحل الخاص الشكل

$$y_p = u(x)x^{-1} + v(x)x^{-1}\ln(x)$$

للحصول على $u(x), \ v(x)$ نستخدم (3.22)، فنحصل على

$$u(x) = \int \frac{-y_2 E(x)}{x^2 W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-x^{-1} \ln(x)\left(9x^2 + 8x + 5\right)}{x^2 \cdot x^{-3}} dx$$

$$= \left(x^3 + 2x^2 + 5x\right) + \left(-3x^3 - 4x^2 - 5x\right) \ln x$$

كما نحصل على

$$v(x) = \int \frac{y_1 E(x)}{x^2 W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{x^{-1}\left(9x^2 + 8x + 5\right)}{x^2 \cdot x^{-3}} dx$$

$$= 3x^3 + 4x^2 + 5x$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \left(\left(x^3 + 2x^2 + 5x\right) + \left(-3x^3 - 4x^2 - 5x\right) \ln x\right) \frac{1}{x}$$

$$+ \left(3x^3 + 4x^2 + 5x\right) \frac{\ln x}{x} = x^2 + 2x + 5$$

ويكون أن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة المعطاة هو مجموع الحلين، المكمل للمعادلة المتجانسة المقابلة والخاص لغير المتجانسة. إذاً الحل العام هو

$$y_g = x^{-1}\left(C_1 + C_2 \ln x\right) + x^2 + 2x + 5$$

3

هذه معادلة أويلر الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $x^2y'' + 5xy' - 12y = 0$. المعادلة المميزة (3.7) لهذه المعادلة المتجانسة تعطي

$$r^2 + 4r - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 2\ ,\ r_2 = -6$$

إذاً نجد من (3.11) أن

$$y_c = C_1x^2 + C_2x^{-6}$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة المعطاة نستخدم فقط طريقة تغيير البارامترات. نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

وبما أن

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-6} \\ 2x & -6x^{-7} \end{vmatrix} = -8x^{-5}$$

إذاً فإن

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^{-6}$$

ويأخذ الحل الخاص عندئذٍ الشكل

$$y_p = u(x)x^2 + v(x)x^{-6}$$

للحصول على $u(x),\ v(x)$ نستخدم (3.22)، فنحصل على

$$u(x) = \int \frac{-y_2 E(x)}{x^2 W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-x^{-6} \ln(x)}{-8x^{-5} \cdot x^2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{\ln(x)}{x^3} = \frac{-1}{16x^2}\left(\ln(x) + \frac{1}{2} \right)$$

كما نحصل على

$$v(x) = \int \frac{y_1 E(x)}{x^2 W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{x^2 \ln(x)}{-8x^{-5} \cdot x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{8} \int x^5 \ln(x) dx = \frac{x^6}{48}\left(\frac{1}{6} - \ln(x) \right)$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{-1}{16x^2}\left(\ln(x) + \frac{1}{2} \right) x^2 + \frac{x^6}{48}\left(\frac{1}{6} - \ln(x) \right) x^{-6}$$

$$= \frac{-\ln(x)}{12} - \frac{1}{36}$$

وبالتالي فإن الحل العام هو

$$y_g = C_1 x^2 + C_2 x^{-6} - \frac{\ln(x)}{12} - \frac{1}{36}$$

7

هذه مسألة ابتدائية لمعادلة أويلر الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية، حيث $a = 5,\ b = 20$. للحصول على الحل العام لها نستخدم المعادلة المميزة (3.7) فنجد أن

$$r^2 + 4r + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = -2 \pm 4i$$

إذاً من (3.15) نحصل على

$$y_g(x) = x^{-2}\left(C_1 \cos(4\ln(x)) + C_2 \sin(4\ln(x))\right)$$

وبما أنه من الشروط الابتدائية، لدينا

$$y(1) = 0 \quad \to \quad C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 0$$

وأيضاً

$$y'(1) = 2 \quad \to \quad 4C_2 - 2C_1 = 2 \quad \to \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = \frac{1}{2x^2}\sin(4\ln(x))$$

11

هذه مسألة ابتدائية تتكون من معادلة أويلر الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثانية وبعض الشروط الابتدائية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$. المعادلة المميزة (3.7) تعطي

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = -3$$

إذاً من (3.12) نحصل على

$$y = x^{-3}\left(C_1 + C_2 \ln(x)\right)$$

وبما أن

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^{-3} & x^{-3}\ln(x) \\ -3x^{-4} & x^{-4}(-3\ln(x)+1) \end{vmatrix}=\frac{1}{x^7}\neq 0$$

إذاً

$$y_1(x)=\frac{1}{x^3},\quad y_2(x)=\frac{1}{x^3}\ln(x)$$

وبالتالي نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p=u(x)y_1(x)+v(x)y_2(x)=\frac{1}{x^3}u(x)+\frac{1}{x^3}\ln(x)v(x)$$

للحصول على $u(x),\ v(x)$ نستخدم (3.22)، فنحصل على

$$u(x)=\int\frac{-y_2E(x)}{x^2W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{-x^{-3}\ln(x)\cdot 27\ln(x)}{x^2\cdot x^{-7}}dx$$

$$=-27\int x^2(\ln(x))^2dx=x^3\left(-9(\ln(x))^2+6\ln(x)-2\right)$$

كما نحصل على

$$v(x)=\int\frac{y_1E(x)}{x^2W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{x^{-3}27\ln(x)}{x^2\cdot x^{-7}}dx$$

$$=27\int x^2\ln(x)dx=3x^3(3\ln(x)-1)$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = x^3\left(-9(\ln(x))^2 + 6\ln(x) - 2\right)\cdot x^{-3}$$

$$+3x^3(3\ln(x) - 1)\cdot x^{-3}\ln(x) = 3\ln(x) - 2$$

وبما أنه من الشروط الابتدائية لدينا

$$y(1) = 1 \quad \rightarrow \quad C_1 = 1$$

$$y'(1) = -4 \quad \rightarrow \quad -3C_1 + C_2 = -4 \quad \rightarrow \quad C_2 = -1$$

إذاً الحل المكمل هو

$$y_c = \frac{1}{x^3}(1 - \ln(x))$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g = \frac{1}{x^3}(1 - \ln(x)) + 3\ln(x) - 2$$

****

1

نستخدم التعويضات

$$t = \sin(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \cos(x)\frac{dy}{dt} ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\cos(x)\frac{dy}{dt}\right) = \cos^2(x)\frac{d^2y}{dt^2} - \sin(x)\frac{dy}{dt}$$

فتتحول المعادلة المعطاة إلى

$$\left(\sin^2(x)\cos^2(x)\right)\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\sin(x) - \sin^3(x)\right)\frac{dy}{dt}$$
$$-k^2\cos^2(x)y = 0$$

أو

$$\cos^2(x)\left[\sin^2(x)\frac{d^2y}{dt^2} + \sin(x)\frac{dy}{dt} - k^2y\right] = 0$$

أو إلى معادلة أويلر

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} - k^2y = 0$$

المعادلة المميزة لها هى

$$r^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = +k, \quad r_2 = -k$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g = C_1t^k + C_2t^{-k} = C_1\sin^k(x) + C_2\sin^{-k}(x)$$

3

نستخدم التعويضات

بوضع

$$z = \ln(x-1)\ ,\ x > 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{(x-1)^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\frac{dy}{dz}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة تتحول إلى

$$(x-1)^2\left(\frac{1}{(x-1)^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\frac{dy}{dz}\right) - 4(x-1)\frac{1}{x-1}\frac{dy}{dz}$$

$$-14y = \left(1+e^z\right)^3 - 3\left(1+e^z\right)^2 + 3\left(1+e^z\right) - 8$$

أو

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 5\frac{dy}{dz} - 14y = e^{3z} - 7 \qquad \text{(i)}$$

وهذه معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية. نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة المقابلة هى

$$r^2 - 5r - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -2\ ,\ r_2 = 7$$

إذاً

$$y_c = C_1e^{-2z} + C_2e^{7z} \qquad \text{(ii)}$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة (i) نستخدم طريقة المعاملات غير المحددة. نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p = Be^{3z} + C$$

بالتفاضل والتعويض في (i) نجد أن

$$9Be^{3z} - 15Be^{3z} - 14\left(Be^{3z} + C\right) = e^{3z} - 7$$

إذاً

$$B = -\frac{1}{20},\ C = \frac{1}{2}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = -\frac{1}{20}\ e^{3z} + \frac{1}{2} \qquad \text{(iii)}$$

الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (i) المعطاة هو مجموع الحلين (ii), (iii) إذاً

$$y_g = C_1 e^{-2z} + C_2 e^{7z} - \frac{1}{20}\ e^{3z} + \frac{1}{2}$$

وبما أن

$$z = \ln(x-1) \ \Rightarrow\ (x-1) = e^{z}$$

إذاً

$$y_g = C_1(x-1)^{-2} + C_2(x-1)^{7} - \frac{1}{20}(x-1)^{3} + \frac{1}{2}$$

5

المعادلة المميزة تعطي

$$r^4 - 16 = 0 \ \Rightarrow\ r_{1,2} = 2, -2\ ,\ r_{3,4} = \pm 2i$$

الحل العام هو

$$y_g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3\cos(2x) + C_4\sin(2x)$$

وبتفاضل هذا الحل للحصول على $y_g, y_g', y_g'', y_g^{(3)}$ والتعويض في المعادلـة الأصليـة واستخدام الشروط الابتدائيـة المعطـاة يمكن الحصول على الثوابت. بما أن

$$y_g' = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} - 2C_3\sin(2x) + 2C_4\cos(2x)$$

$$y_g'' = 4C_1e^{2x} + 4C_2e^{-2x} - 4C_3\cos(2x) - 4C_4\sin(2x)$$

$$y_g^{(3)} = 8C_1e^{2x} - 8C_2e^{-2x} + 8C_3\sin(2x) - 8C_4\cos(2x)$$

إذاً

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = -2 \\ y'(0) = 2C_1 - 2C_2 + 2C_4 = 0 \\ y''(0) = 4C_1 + 4C_2 - 4C_3 = 0 \\ y'''(0) = 8C_1 - 8C_2 - 8C_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{13}{32} \\ C_2 = -\frac{19}{32} \\ C_3 = -1 \\ C_4 = -\frac{3}{16} \end{cases}$$

وبالتالي فإن

$$y_g(x) = -\frac{13}{32}e^{2x} - \frac{19}{32}e^{-2x} - \cos(2x) - \frac{3}{16}\sin(2x)$$

7

المعادلة المميزة تعطي

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -1,\ r_3 = 2$$

إذاً

$$y_c = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

وبما أن $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ إذاً يمكن فرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p(x) = A + B\cos(2x) + C\sin(2x)$$

وبالتفاضل نجد أن

$$y_p{'}(x) = -2B\sin(2x) + 2C\cos(2x)$$

$$y_p{''}(x) = -4B\cos(2x) - 4C\sin(2x)$$

$$y_p^{(3)} = 8B\sin(2x) - 8C\cos(2x)$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على

$$(10B + 10C)\sin(2x) + (10B - 10C)\cos(2x) + 2A$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

وبالتالي فإن

$$A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{40},\ C = \frac{1}{40}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{40}\cos 2x + \frac{1}{40}\sin 2x$$

والحل العام هو

$$y_g(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{40}(\cos(2x) - \sin(2x))$$

9

المعادلة المميزة تعطي

$$r^3 - 13r + 12 = 0 \quad \Rightarrow r_1 = 1 \ , \ r_2 = -4 \ , \ r_3 = 3$$

إذاً

$$y_c(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-4x} + C_3e^{3x}$$

نفرض الحل الخاص في الشكل

$$y_p(x) = A\cosh(2x) + B\sinh(2x)$$

وبالتفاضل

$$y_p{}'(x) = 2A\sinh(2x) + 2B\cosh(2x)$$

$$y_p{}''(x) = 4A\cosh(2x) + 4B\sinh(2x)$$

$$y_p^{(3)}(x) = 8A\sinh(2x) + 8B\cosh(2x)$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية، إذاً

$$(8A - 26A + 12B)\sinh(2x)$$

$$+(8B - 26B + 12A)\cosh(2x) = \cosh(2x)$$

إذاً

$$\begin{cases} 12B - 18A = 0 \\ 12A - 18B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{15}\ , \ B = -\frac{1}{10}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p(x) = -\frac{1}{15}\cosh(2x) - \frac{1}{10}\sinh(2x)$$

والحل العام هو

$$y_g(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{3x}$$
$$- \frac{1}{15}\cosh(2x) - \frac{1}{10}\sinh(2x)$$

11

المعادلة المميزة تعطي

$$r^3 - 4r^2 + 20r = 0 \Rightarrow r_1 = 0\ , \ r_{2,3} = 2 \pm 4i$$

إذاً

$$y_c = C_1 + C_2 e^{2x}\cos(4x) + C_3 e^{2x}\sin(4x)$$

نفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

وبالتفاضل نجد أن

$$y_p{}'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y_p{}''(x) = 6Ax + 2B,$$

$$y_p^{(3)}(x) = 6A$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن

$$6A - 24Ax - 8B + 60Ax^2 + 40Bx + 20C = x^2 + 4x - 10$$

وبالتالي فإن

$$\begin{cases} 60A = 1 \\ -24A + 40B = 4 \\ 6A - 8B + 20C = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{60} \\ B = \dfrac{11}{100} \\ C = -\dfrac{461}{1000} \end{cases}$$

إذاً الحل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{60}x^3 + \frac{11}{100}x^2 - \frac{461}{1000}x$$

والحل العام هو

$$y_g(x) = C_1 + C_2e^{2x}\cos(4x) + C_3e^{2x}\sin(4x)$$
$$+\frac{1}{60}x^3 + \frac{11}{100}x^2 - \frac{461}{1000}x$$

13

هذه معادلة أويلر الخطية غير المتجانسة من الرتبة الرابعة. بفرض أن $\ln(x) = z$ أو $x = e^z$ نجد أن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}\right)=\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}-\frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dz^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz}-\frac{3}{x^3}\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dz^3}\right)$$

$$=-\frac{6}{x^4}\frac{dy}{dz}+\frac{11}{x^4}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{6}{x^4}\frac{d^3y}{dz^3}+\frac{1}{x^4}\frac{d^4y}{dz^4}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن

$$\left[\bar{D}(\bar{D}-1)(\bar{D}-2)(\bar{D}-3)+6\bar{D}(\bar{D}-1)(\bar{D}-2)\right.$$

$$\left.+20\bar{D}(\bar{D}-1)+14\bar{D}+36\right]y=8e^{-2z}$$

حيث $\bar{D}=\frac{d}{dz}$، وبعد الاختصار، نجد أن معادلة أويلر المعطاة قد تحولت إلى المعادلة التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة في الشكل

$$\left[\bar{D}^4+13\bar{D}^2+36\right]y=8e^{-2z}$$

نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، أي الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة $\left[\bar{D}^4+13\bar{D}^2+36\right]y=0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هى

$$r^4 + 13r^2 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm 2i \ , \ r_{3,4} = \pm 3i$$

إذاً

$$y_c(x) = C_1 \cos(2z) + C_2 \sin(2z) + C_3 \cos(3z) + C_4 \sin(3z)$$

للحصول على الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة نستخدم طريقة المؤثر التفاضلي. إذاً الحل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{\overline{D}^4 + 13\overline{D}^2 + 36} \cdot 8e^{-2z}$$

$$= \frac{8e^{-2z}}{(-2)^4 + 13(-2)^2 + 36} = \frac{1}{13} e^{-2z}$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = C_1 \cos(2\ln(x)) + C_2 \sin(2\ln(x))$$

$$+C_3 \cos(3\ln(x)) + C_4 \sin(3\ln(x)) + \frac{1}{13} e^{-2z}$$

لاحظ أن استخدام التعويض $z = \ln(x)$ أو $x = e^z$ يعني أن

$$xy' = \overline{D}y, \quad x^2 y'' = \overline{D}(\overline{D} - 1)y$$

$$x^3 y^{(3)} = \overline{D}(\overline{D} - 1)(\overline{D} - 2)y$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x^n y^{(n)} = \overline{D}(\overline{D} - 1)\cdots(\overline{D} - (n-1))y$$

15

هذه معادلة أويلر الخطية غير المتجانسة من الرتبة الرابعة. بفرض التعويض

$$\ln(x) = z \Rightarrow x = e^{z}$$

إذاً المعادلة المعطاة تصبح على الشكل

$$\left(\overline{D}(\overline{D}-1)(\overline{D}-2)(\overline{D}-3)+7\overline{D}(\overline{D}-1)(\overline{D}-2)\right.$$
$$\left.+8\overline{D}(\overline{D}-1)\right)y = 4e^{-3z}$$

حيث $\overline{D} = \frac{d}{dz}$. وبعد الاختصار نجد أن معادلة أويلر المعطاة قد تحولت إلى المعادلة التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة

$$\left[\overline{D}^4 + \overline{D}^3 - 2\overline{D}^2\right]y = 4e^{-3z}$$

نوجد أولاً الحل المكمل، y_c، أي الحل العام للمعادلة المتجانسة المقابلة. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هى

$$r^4 + r^3 - 2r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0\ ,\ r_3 = -2\ ,\ r_4 = 1$$

إذاً

$$y_c(x) = C_1 + C_2 z + C_3 e^{-2z} + C_4 e^{z}$$

الحل الخاص هو

$$y_p(x) = \frac{1}{\overline{D}^4 + \overline{D}^3 - 2\overline{D}^2} \cdot 4e^{-3z}$$

$$= \frac{4e^{-3z}}{(-3)^4 + (-3)^3 - 2(-3)^2} = \frac{1}{9} e^{-3z}$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = C_1 + C_2 \ln(x) + C_3 x^{-2} + C_4 x + \frac{1}{9} x^{-3}$$

17

هذه معادلة أويلر الخطية غير المتجانسة من الرتبة الثالثة. نفرض التعويض

$$\ln(x) = z \Rightarrow x = e^z$$

إذاً المعادلة المعطاة تصبح على الشكل

$$\left[\overline{D}(\overline{D} - 1)(\overline{D} - 2) - 2\overline{D} + 4\right] y = 12z - 4$$

حيث $\overline{D} = \frac{d}{dz}$. وبعد الاختصار نجد أن معادلة أويلر المعطاة قد تحولت إلى المعادلة التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة

$$\left[\overline{D}^3 - 3\overline{D}^2 + 4\right] y = 12z - 4$$

نوجد أولاً الحل المكمل، $y_c(x)$، والذي هو الحل العام للمعادلة المتجانسة $\left[\overline{D}^3 - 3\overline{D}^2 + 4\right] y = 0$. المعادلة المميزة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$r^3 - 3r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1 \ , \ r_{2,3} = 2$$

إذاً

$$y_c = C_1 e^{-z} + C_2 e^{2z} + C_3 z e^{2z}$$

الحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{(\overline{D}+1)(\overline{D}-2)^2}(12z-4)$$

$$= \frac{1}{(\overline{D}-2)(\overline{D}-2)}(\overline{D}+1)^{-1}(12z-4)$$

$$= \frac{1}{(\overline{D}-2)(\overline{D}-2)}(12z-16)$$

$$= \frac{1}{(-2)(\overline{D}-2)}\left(1-\frac{\overline{D}}{2}\right)^{-1}(12z-16)$$

$$= \frac{1}{-2(\overline{D}-2)}(12z-10)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{\overline{D}}{2}\right)^{-1}(12z-10) = \frac{1}{4}(12z-4) = 3z-1$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^2 + C_3 \ln(x) x^2 + 3\ln(x) - 1$$

وبإجراء عملية التفاضل على الحل العام والتعويض في المعادلة الأصلية يمكن أن نحصل على قيم الثوابت. بالتفاضل نجد أن

$$y_g{}' = -C_1 x^{-2} + 2C_2 x + C_3 x + 2C_3 x \ln(x) + \frac{3}{x}$$

$$y_g'' = 2C_1x^{-3} + 2C_2 + 3C_3 + 2C_3\ln(x) - \frac{3}{x^2}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية، إذاً

$$\begin{aligned} y(1) &= C_1 + C_2 + C_3\ln(1) + 3\ln(1) - 1 = 2 \\ y'(1) &= -C_1 + 2C_2 + C_3 + 2C_3\ln(1) + 3 = 2 \\ y''(1) &= 2C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 2C_3\ln(1) - 3 = 9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 2 \end{cases}$$

إذاً الحل العام هو

$$y_g(x) = 3x^{-1} + 2x^2\ln(x) + 3\ln(x) - 1$$

****

1

المعادلة المميزة للمصفوفة A تعطي

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 0$$

حيث نجد أن هناك قيمتين مميزتين مكررتين للمصفوفة A هما $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. نوجد المتجه المميز X_1 المقابل للقيمة الأولى $\lambda_1 = 1$ وذلك بحل المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = \alpha,\ x_1 = 0$$

وبالتالي فإن

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},\ \alpha \neq 0$$

وهما مرتبطان خطياً وبالتالي وحسب نظرية (5.5) فإن المصفوفة A غير قابلة لأن تكون قطرية *(Not Diagonalizable)*.

3

المعادلة المميزة للمصفوفة C تعطي

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 5$$

المتجهات المميزة المقابلة هى

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولأن القيم المميزة مختلفة وحقيقية وكذلك المتجهات المميزة كلها غير مرتبطة خطياً فإن المصفوفة C يمكن أن تتحول إلى مصفوفة قطرية. بما أن

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذاً نجد أن

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

5

المعادلة المميزة للمصفوفة E تعطي

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -2, \ \lambda_4 = -4$$

ويمكن الحصول على المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة، حيث نجد أنهم

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \ X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \ X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولأن القيم المميزة مختلفة فإن المتجهات المميزة تكون غير مرتبطة خطياً وبالتالي فإن المصفوفة E تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية. بما أن

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

إذاً فإن

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

حيث يمكن القول أن المصفوفة P حولت المصفوفة E إلى مصفوفة قطرية.

7

نضع النظام المعطى في الشكل المصفوفي

$$Y' = AY$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$$

القيم المميزة للمصفوفة A هي

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$$

المتجهات المميزة المقابلة هى

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذاً

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

نفرض أن

$$Y = PZ;\quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^t$$

بالتعويض في النظام المعطى نحصل على

$$PZ' = APZ$$

وبالضرب من اليسار في P^{-1} نحصل على

$$P^{-1}PZ' = P^{-1}APZ \quad \Rightarrow \quad Z' = DZ$$

وبالتالي فإن

$$z_1{}' = 2z_1,\ z_2{}' = 5z_2$$

وحلول هذه المعادلات التفاضلية الانفصالية هي على الترتيب

$$z_1 = ae^{2t},\ z_2 = be^{5t}$$

هكذا نجد أن

$$Y=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ae^{2t}\\ be^{5t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2ae^{2t}+be^{5t}\\ ae^{2t}+be^{5t}\end{bmatrix}$$

أو

$$y_1=-2ae^{2t}+be^{5t}$$
$$y_2=ae^{2t}+be^{5t}$$

9

نضع النظام المعطى في الشكل المصفوفي

$$Y'=AY$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix},\ Y'=\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\\ y_3'\end{bmatrix}$$

القيم المميزة للمصفوفة A هى

$$\lambda_1=-1,\ \ \lambda_2=\left(1+\sqrt{3}i\right)/2,\ \ \lambda_3=\left(1-\sqrt{3}i\right)/2$$

المتجهات المميزة المقابلة هى

$$\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\ 1\\ -\frac{1}{5}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\ 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

إذاً

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{1}{5} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix} = D$$

نفرض أن

$$Y = PZ; \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^t$$

بالتعويض في النظام المعطى نجد أن

$$PZ' = APZ$$

وبالضرب من اليسار في P^{-1} نحصل على

$$P^{-1}PZ' = P^{-1}APZ \quad \Rightarrow \quad Z' = DZ$$

أو

$$z_1{}' = -z_1, \quad z_2{}' = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{2} z_2 , \quad z_3{}' = \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2} z_3$$

وحلول هذه المعادلات التفاضلية هي على الترتيب

$$z_1 = ae^{-t}, \; z_2 = be^{\frac{(1+\sqrt{3}i)t}{2}} , \; z_3 = ce^{\frac{(1-\sqrt{3}i)t}{2}}$$

هكذا نجد أن

$$Y=\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{1}{5} & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ae^{-t} \\ be^{\frac{(1+\sqrt{3}i)t}{2}} \\ ce^{\frac{(1-\sqrt{3}i)t}{2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{4}{5}ae^{-t}+be^{\frac{(1+\sqrt{3}i)t}{2}}+ce^{\frac{(1-\sqrt{3}i)t}{2}} \\ ae^{-t}+\frac{(-1+\sqrt{3}i)}{2}be^{\frac{(1+\sqrt{3}i)t}{2}}-\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}ce^{\frac{(1-\sqrt{3}i)t}{2}} \\ -\frac{1}{5}ae^{-t}+be^{\frac{(1+\sqrt{3}i)t}{2}}+ce^{\frac{(1-\sqrt{3}i)t}{2}} \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$y_1=-\frac{4}{5}ae^{-t}+2e^{\frac{t}{2}}\left[\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$$

$$y_2=ae^{-t}-\alpha e^{\frac{t}{2}}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$$

$$+\beta e^{\frac{t}{2}}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)-\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$$

$$y_3=-\frac{1}{5}ae^{-t}+2e^{\frac{t}{2}}\left[\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$$

حيث

$$\alpha = \frac{b+c}{2}, \quad \beta = \frac{b-c}{2}$$

11

نضع النظام المعطى في الشكل المصفوفي

$$Y' = AY$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y' \end{bmatrix}$$

القيم المميزة للمصفوفة A هى

$$\lambda_1 = -6, \quad \lambda_2 = -1$$

المتجهات المميزة المقابلة هى

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

إذاً

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

نفرض أن

$$Y = PZ; \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}^t$$

بالتعويض في النظام المعطى نحصل على

$$PZ' = APZ$$

وبالضرب من اليسار في P^{-1} نحصل على

$$P^{-1}PZ' = P^{-1}APZ \quad \Rightarrow \quad Z' = DZ$$

وبالتالي فإن

$$\begin{cases} z_1' = -z_1 \\ z_2' = -6z_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = ae^{-t} \\ z_2 = be^{-6t} \end{matrix}$$

هكذا نجد أن

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^{-t} \\ be^{-6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{-t} + 3be^{-6t} \\ ae^{-t} - 2be^{-6t} \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{aligned} y_1 &= ae^{-t} + 3be^{-6t} \\ y_2 &= ae^{-t} - 2be^{-6t} \end{aligned}$$

13

باستخدام المؤثرات التفاضلية يتحول النظام المعطى إلى الشكل

$$(2D - 1)x + (D + 4)y = 6e^{2t} \qquad (1)$$

$$Dx - Dy = 0 \qquad (2)$$

للحصول على $y = y(t)$ يجب التخلص أولاً من x، وذلك بضرب المعادلة الثانية في $(2D - 1)$ والمعادلة الأولى في $(-D)$ لنحصل على

$$\left(-2D^2+D\right)x-\left(D^2+4D\right)y=-12e^{2t} \qquad (3)$$

$$\left(2D^2-D\right)x-\left(2D^2-D\right)y=0 \qquad (4)$$

بجمع المعادلتين (4) , (3) نحصل على

$$\left(-D^2-4D-2D^2+D\right)y=-12e^{2t}$$

أو

$$\left(D^2+D\right)y=4e^{2t}$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية غير متجانسة من الرتبة الثانية. الحل المكمل لها $y_c(t)$ هو

$$y_c(t)=C_1+C_2e^{-t}$$

اما الحل الخاص فهو

$$y_p(t)=\frac{1}{D(D+1)}4e^{2t}=\frac{4e^{2t}}{2^2+2}=\frac{2}{3}e^{2t}$$

إذاً الحل العام هو

$$y(t)=C_1+C_2e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}$$

للحصول على $x=x(t)$ يجب التخلص أولاً من y، وذلك بضرب المعادلة الثانية في $(D+4)$، والمعادلة الأولى في (D) لنحصل على

$$\left(2D^2-D\right)x+\left(D^2+4D\right)y=12e^{2t} \qquad (5)$$

$$\left(D^2+4D\right)x-\left(D^2+4D\right)y=0 \qquad (6)$$

بجمع المعادلتين (5), (6) نحصل على

$$\left(2D^2 - D + D^2 + 4D\right)x = 12e^{2t}$$

أو

$$\left(D^2 + D\right)x = 4e^{2t}$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية غير متجانسة من الرتبة الثانية. الحل العام هو

$$x(t) = C_3 + C_4e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$$

وبالتعويض الآن عن $x(t), y(t)$ بدلاً من x, y نجد أن

$$C_4 = C_2 \quad , \quad C_3 = 4C_1$$

وبالتالي فإن

$$x(t) = 4C_1 + C_2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$$

$$y(t) = C_1 + C_2e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}$$

****

1

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[2\sinh(2t) - 4] = 2\mathscr{L}[\sinh(2t)] - \mathscr{L}[4]$$

$$= 2\frac{2}{s^2 - 4} - \frac{4}{s} = \frac{4(-s^2 + s + 4)}{s(s^2 - 4)}$$

3

$$\mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[4t\sin(2t)] = 4\mathscr{L}[t\sin(2t)]$$

$$= 4\int_0^\infty e^{-st} t\sin(2t)dt = 4\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-st} t\sin(2t)dt = 4I$$

نضع

$$dv = e^{-st}dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{s}e^{-st}dt\,;$$

$$u = t\sin(at) \Rightarrow du = \sin(at) + at\cos(at)$$

فنحصل على

$$I = -\frac{t\sin(at)}{s}e^{-st}\Bigg|_0^\beta$$

$$+\frac{1}{s}\left(\int_0^\beta \sin(at)e^{-st}dt + a\int_0^\beta t\cos(at)e^{-st}dt\right)$$

$$= \left[-\frac{t\sin(at)}{s}e^{-st}\right]_0^\beta + \frac{1}{s}\mathscr{L}(\sin(at)) + \frac{a}{s}I_1$$

حيث

$$I_1 = \int_0^\beta t\cos(at)e^{-st}\,dt$$

نضع

$$u = t\cos(at) \qquad \& \qquad dv = e^{-st}\,dt$$
$$du = \cos(at) - at\sin(at) \qquad \& \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}\,dt$$

إذاً

$$I_1 = -\frac{t\cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta$$

$$+\frac{1}{s}\left(\int_0^\beta \cos(at)e^{-st}\,dt - a\int_0^\beta t\sin(at)e^{-st}\,dt\right)$$

$$= -\frac{t\cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{1}{s}\mathscr{L}(\cos(at)) - \frac{a}{s}I$$

$$I = -\frac{t\sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{1}{s}\mathscr{L}(\sin(at))$$

$$+\frac{a}{s}\left(-\frac{t\cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{1}{s}\mathscr{L}(\cos(at)) - \frac{a}{s}I\right)$$

أو

$$I\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right) = -\frac{t\sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{a}{s}\left[-\frac{t\cos(at)}{s}e^{-st}\right]_0^\beta$$

$$+\frac{1}{s}\mathcal{L}(\sin(at))+\frac{a}{s^2}\mathcal{L}(\cos(at))$$

وبالتالي فإن

$$I=\frac{s^2}{s^2+a^2}\left\{-\frac{t\sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^{\beta}+\frac{a}{s}\left[-\frac{t\cos(at)}{s}e^{-st}\right]_0^{\beta}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s}\mathcal{L}(\sin(at))+\frac{a}{s^2}\mathcal{L}(\cos(at))\right\}$$

وهكذا نجد أن

$$\mathcal{L}(t\sin(at))=\lim_{\beta\to\infty}I=\lim_{\beta\to\infty}\frac{s^2}{s^2+a^2}\times$$

$$\times\left\{\left[-\frac{\beta\sin(a\beta)}{s}e^{-s\beta}+0\right]+\frac{a}{s}\left[-\frac{\beta\cos(a\beta)}{s}e^{-s\beta}+0\right]\right\}$$

$$+\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}+\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}=\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

إذاً

$$\mathcal{L}[4t\sin(2t)]=\frac{16s}{\left(s^2+4\right)^2}$$

5

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[t-\cos(5t)]=\mathcal{L}[t]-\mathcal{L}[\cos(5t)]$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2 + 25} = \frac{s^2 + 25 - s^3}{s^2\left(s^2 + 25\right)}$$

7

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[2t^2 e^{-3t} - 4t + 1\right]$$

$$= 2\mathcal{L}\left[t^2 e^{-3t}\right] - 4\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[1]$$

$$= 2\frac{2!}{(s+3)^3} - 4\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{4}{(s+3)^3}$$

9

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\cos^2(2t)\right]$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1+\cos(4t)}{2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos(4t)]$$

$$= \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+16} = \frac{\left(s^2+16\right)+s^2}{2s\left(s^2+16\right)}$$

11

$$\mathcal{L}\left[t^n \sin(at)\right] = \int_0^\infty e^{-st} t^n \sin(at)\,dt$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-st} t^n \sin(at)\,dt$$

نفرض

$$I=\int_0^{\beta} e^{-st}t^n \sin(at)dt$$

نضع

$$u=t^n\sin(at) \quad \& \quad dv=e^{-st}dt$$
$$du=nt^{n-1}\sin(at)+at^n\cos(at) \quad \& \quad v=-\frac{1}{s}e^{-st}dt$$

إذاً

$$I=-\frac{t^n\sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^{\beta}$$

$$+\frac{1}{s}\left(\int_0^{\beta} nt^{n-1}\sin(at)e^{-st}dt+a\int_0^{\beta} t^n\cos(at)e^{-st}dt\right)$$

$$=-\frac{t^n\sin(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^{\beta}+\frac{n}{s}\int_0^{\beta} t^{n-1}\sin(at)e^{-st}dt+\frac{a}{s}I_1$$

نفرض

$$I_1=\int_0^{\beta} t^n\cos(at)e^{-st}dt$$

نضع

$$u=t^n\cos(at) \quad \& \quad dv=e^{-st}dt$$
$$du=nt^{n-1}\cos(at)-at^n\sin(at) \quad \& \quad v=-\frac{1}{s}e^{-st}dt$$

إذاً

$$I_1 = -\frac{t^n \cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta$$

$$+\frac{1}{s}\left(\int_0^\beta n t^{n-1} \cos(at) e^{-st} dt - a \int_0^\beta t^n \sin(at) e^{-st} dt \right)$$

$$= -\frac{t^n \cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} \cos(at) e^{-st} dt - \frac{a}{s} I$$

وبالتالي فإن

$$I = -\frac{t^n \sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} \sin(at) e^{-st} dt$$

$$+\frac{a}{s}\left(-\frac{t^n \cos(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} \cos(at) e^{-st} dt - \frac{a}{s} I \right)$$

$$I\left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) = -\frac{t^n \sin(at)}{s} e^{-st} \Big|_0^\beta + \frac{a}{s}\left[-\frac{t^n \cos(at)}{s} e^{-st} \right]_0^\beta$$

$$+\frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} \sin(at) e^{-st} dt + \frac{an}{s^2} \int_0^\beta t^{n-1} \cos(at) e^{-st} dt$$

هكذا نجد أن

$$I=\frac{s^2}{s^2+a^2}\left\{-\frac{t^n\sin(at)}{s}e^{-st}\Bigg|_0^\beta+\frac{a}{s}\left[-\frac{t^n\cos(at)}{s}e^{-st}\right]_0^\beta\right.$$

$$\left.+\frac{n}{s}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\sin(at)\right)+\frac{an}{s^2}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\cos(at)\right)\right\}$$

إذاً

$$\mathcal{L}\left(t^n\sin(at)\right)=\lim_{\beta\to\infty}I=\lim_{\beta\to\infty}\frac{s^2}{s^2+a^2}\times$$

$$\times\left\{\left[-\frac{\beta^n\sin(a\beta)}{s}e^{-s\beta}+0\right]+\frac{a}{s}\left[-\frac{\beta^n\cos(a\beta)}{s}e^{-s\beta}+0\right]\right\}$$

$$+\frac{ns}{s^2+a^2}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\sin(at)\right)+\frac{an}{s^2+a^2}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\cos(at)\right)$$

$$=\frac{ns}{s^2+a^2}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\sin(at)\right)+\frac{an}{s^2+a^2}\mathcal{L}\left(t^{n-1}\cos(at)\right)$$

13

$$\mathcal{L}\left[t^n\cos(at)\right]=\int_0^\infty e^{-st}t^n\cos(at)dt$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-st}t^n\cos(at)dt$$

نفرض

$$I=\int_0^\beta e^{-st}t^n\cos(at)dt$$

نضع

$$u = t^n \cos(at) \qquad \& \qquad dv = e^{-st}\,dt$$
$$du = nt^{n-1}\cos(at) - at^n \sin(at) \qquad \& \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}\,dt$$

إذاً

$$I = -\frac{t^n \cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta$$
$$+\frac{1}{s}\left(\int_0^\beta nt^{n-1}\cos(at)e^{-st}\,dt - a\int_0^\beta t^n \sin(at)e^{-st}\,dt\right)$$
$$= -\frac{t^n \cos(at)}{s}e^{-st}\Big|_0^\beta + \frac{n}{s}\mathscr{L}\left[t^{n-1}\cos(at)\right] - \frac{a}{s}\mathscr{L}\left[t^n \sin(at)\right]$$

إذاً

$$\mathscr{L}\left[t^n \cos(at)\right] = \lim_{\beta\to\infty}\left\{-\frac{\beta^n \cos(a\beta)}{s}e^{-s\beta} + 0\right.$$
$$\left.+\frac{n}{s}\mathscr{L}\left[t^{n-1}\cos(at)\right] - \frac{a}{s}\mathscr{L}\left[t^n \sin(at)\right]\right.$$
$$= \frac{n}{s}\mathscr{L}\left[t^{n-1}\cos(at)\right] - \frac{a}{s}\mathscr{L}\left[t^n \sin(at)\right]$$
$$= \frac{n}{s}\mathscr{L}\left[t^{n-1}\cos(at)\right] - \frac{a}{s}\left\{\frac{ns}{s^2+a^2}\mathscr{L}\left(t^{n-1}\sin(at)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{an}{s^2+a^2}\mathscr{L}\left(t^{n-1}\cos(at)\right)\right\}$$

$$= \frac{ns}{s^2 + a^2} \mathcal{L}\left[t^{n-1} \cos(at)\right] - \frac{na}{s^2 + a^2} \mathcal{L}\left(t^{n-1} \sin(at)\right)$$

15

$$\mathcal{L}[t \sin(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[\sin(at)] + \frac{a}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[\cos(at)]$$

$$= \frac{s}{s^2 + a^2} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} + \frac{a}{s^2 + a^2} \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} = \frac{2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$$

17

$$\mathcal{L}[t \cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[\cos(at)] - \frac{a}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[\sin(at)]$$

$$= \frac{s}{s^2 + a^2} \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{a}{s^2 + a^2} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{s^2 - a^2}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$$

19

$$\mathcal{L}\left[t^2 \sin(at)\right] = \frac{2s}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[t \sin(at)] + \frac{2a}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[t \cos(at)]$$

$$= \frac{2s}{s^2 + a^2} \frac{2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2} + \frac{2a}{s^2 + a^2} \frac{s^2 - a^2}{\left(s^2 + a^2\right)^2} = \frac{6as^2 - 2a^3}{\left(s^2 + a^2\right)^3}$$

21

$$\mathcal{L}\left[t^2 \cos(at)\right] = \frac{2s}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[t \cos(at)] - \frac{2a}{s^2 + a^2} \mathcal{L}[t \sin(at)]$$

$$= \frac{2s}{s^2+a^2}\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2} - \frac{2a}{s^2+a^2}\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2} = \frac{2s^3-6a^2s}{\left(s^2+a^2\right)^3}$$

23

$$\mathcal{L}\left[t^3\sin(at)\right] = \frac{3s}{s^2+a^2}\mathcal{L}\left[t^2\sin(at)\right]$$

$$+\frac{3a}{s^2+a^2}\mathcal{L}\left[t^2\cos(at)\right] = \frac{3s}{s^2+a^2}\frac{6as^2-2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^3}$$

$$+\frac{3a}{s^2+a^2}\frac{2s^3-6a^2s}{\left(s^2+a^2\right)^3} = \frac{24as\left(s^2-a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^4}$$

25

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[4t^3\sin(t)\right] = 4\mathcal{L}\left[t^3\sin(t)\right]$$

$$= 4\times\frac{24s\left(s^2-1^2\right)}{\left(s^2+1^2\right)^4} = \frac{96s\left(s^2-1\right)}{\left(s^2+1\right)^4}$$

27

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[(t-1)\cos(3t)] = \mathcal{L}[t\cos(3t)] - \mathcal{L}[\cos(3t)]$$

$$= \frac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2} - \frac{s^2}{s^2+9}$$

29

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[2\cosh^2(3t)\right]$$

$$= 2\mathcal{L}\left[\frac{e^{6t} + 2 + e^{-6t}}{4}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{6t}\right] + \mathcal{L}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{-6t}\right]$$

$$= \frac{1}{2(s-6)} + \frac{1}{s} + \frac{1}{2(s+6)} = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 - 36}$$

31

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s+1}\right) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-(-1)}\right) = -e^{-t}$$

33

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s}\right) = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = -e^{-t} + 1$$

35

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s-1} + \frac{1}{s^2}\right) = 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = 4e^{t} + t$$

37

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s^2+4} + \frac{5}{s^4}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

$$+ \frac{5}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3!}{s^4}\right) = -\frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{5}{6}t^3$$

39

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10-s}{s^2+10}+\frac{1}{s^7}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10}{s^2+10}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+10}\right)$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^7}\right)=\frac{10}{\sqrt{10}}\sin\left(\sqrt{10}t\right)-\cos\left(\sqrt{10}t\right)+\frac{1}{6!}t^6$$

* *

1

$$\mathcal{L}[tu(t-4)] = \mathcal{L}[(t-4+4)u(t-4)]$$
$$= e^{-4s}\mathcal{L}[t+4] = e^{-4s}\mathcal{L}[t] + e^{-4s}\mathcal{L}[4]$$
$$= \frac{e^{-4s}}{s^2} + \frac{4e^{-4s}}{s}$$

3

$$\mathcal{L}[2(t-4)u(t-4)] = e^{-4s}\mathcal{L}[2t]$$
$$= 2e^{-4s}\mathcal{L}[t] = \frac{2e^{-4s}}{s^2}$$

5

بما أن

$$\sinh(3t) + \cosh(3t) = \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} + \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} = e^{3t}$$

إذاً

$$\mathcal{L}\left[\sinh(3t) + \cosh(3t) - 2t^3\right] = \mathcal{L}\left[e^{3t} - 2t^3\right]$$
$$= \mathcal{L}\left[e^{3t}\right] - 2\mathcal{L}\left[t^3\right] = \frac{1}{s-3} - 2\frac{3!}{s^4} = \frac{1}{s-3} - \frac{12}{s^4}$$

7

$$\mathcal{L}\left[\sinh(6t) + e^{-t}\cosh(t)\right] = \mathcal{L}[\sinh(6t)]$$

$$+\mathcal{L}\left[e^{-t}\cosh(t)\right]=\frac{6}{s^2-36}+\frac{s+1}{(s+1)^2-1}$$

9

$$\mathcal{L}\left[e^{2t}\cos(5t)-3t^3\right]=\mathcal{L}\left[e^{2t}\cos(5t)\right]-3\mathcal{L}\left[t^3\right]$$

$$=\frac{s-2}{(s-2)^2+25}-3\frac{3!}{s^4}=\frac{s-2}{(s-2)^2+25}-\frac{18}{s^4}$$

11

$$\mathcal{L}\left[3e^{-4t}\sin(2t)\right]=3\mathcal{L}\left[e^{-4t}\sin(2t)\right]$$

$$=\frac{6}{(s+4)^2+4}$$

13

نفرض

$$f(t)=2u(t-4)h(t-4)$$

حيث

$$h(t-4)=t^3=(t-4)^3+12(t-4)^2+48(t-4)+64,$$

إذاً

$$\mathcal{L}[f(t)]=2\mathcal{L}[h(t-4)u(t-4)]$$

$$=2e^{-4s}\mathcal{L}[h(t)]=2e^{-4s}\mathcal{L}\left[t^3+12t^2+48t+64\right]$$

$$= 2e^{-4s}\left(\mathcal{L}\left[t^3\right] + 12\mathcal{L}\left[t^2\right] + 48\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[64]\right]$$

$$= e^{-4s}\left[\frac{12}{s^4} + \frac{48}{s^3} + \frac{96}{s^2} + \frac{128}{s}\right]$$

15

$$\mathcal{L}\left[e^{-4t}\cosh(6t)\right] = \frac{s+4}{(s+4)^2 - 36}$$

17

$$f(t) = h\left[u(t-4n) - u(t-4n-4)\right]$$

$$-h\left[u(t-4n-4) - u(t-4n-8)\right]$$

$$= hu(t-4n) - 2hu(t-4n-4) + hu(t-4n-8)$$

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \mathcal{L}\left[hu(t-4n)\right] - 2\mathcal{L}\left[hu(t-4n-4)\right]$$

$$+\mathcal{L}\left[hu(t-4n-8)\right] = e^{-4ns}\mathcal{L}[h] - 2e^{-(4n+4)s}\mathcal{L}[h]$$

$$+e^{-(4n+8)s}\mathcal{L}[h] = e^{-4ns}\frac{h}{s} - 2e^{-(4n+4)s}\frac{h}{s}$$

$$+e^{-(4n+8)s}\frac{h}{s} = e^{-4ns}\frac{h}{s}\left(1 - 2e^{-4s} + e^{-8s}\right)$$

19

$$f(t) = 2t(1 - u(t-5)) + (t+2)u(t-5)$$

$$= 2t - (2t - (t+2))u(t-5)$$

$$= 2t - (t-2)u(t-5) = 2t - \left((t-5)+3\right)u(t-5)$$

إذاً

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \mathscr{L}\left[2t - ((t-5)+3)u(t-5)\right]$$

$$= \mathscr{L}\left[2t\right] - \mathscr{L}\left[((t-5)+3)u(t-5)\right]$$

$$= 2\mathscr{L}[t] - e^{-5s}\mathscr{L}[t+3] = 2\mathscr{L}[t] - e^{-5s}\mathscr{L}[t] - e^{-5s}\mathscr{L}[3]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{e^{-5s}}{s^2} - \frac{3e^{-5s}}{s}$$

21

$$f(t) = -2t^2\left(1-u(t-9)\right) + (t+1)^3 u(t-9)$$

$$= -2t^2 + \left(2t^2 + (t+1)^3\right)u(t-9)$$

$$= -2t^2 + \left(t^3 + 5t^2 + 3t + 1\right)u(t-9)$$

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right] = \mathscr{L}\left[-2t^2 + \left(t^3+5t^2+3t+1\right)u(t-9)\right] = \mathscr{L}\left[-2t^2\right]$$

$$+\mathscr{L}\left[\left((t-9)^3 + 32(t-9)^2 + 336(t-9) + 1162\right)u(t-9)\right]$$

$$= -2\mathscr{L}\left[t^2\right] + e^{-9s}\mathscr{L}\left[t^3 + 32t^2 + 336t + 1162\right]$$

$$= -2\frac{2!}{s^3} + e^{-9s}\left(\frac{3!}{s^4} + 32\frac{2!}{s^3} + \frac{336}{s^2} + \frac{1162}{s}\right)$$

$$= -\frac{4}{s^3} + e^{-9s}\left(\frac{6}{s^4} + \frac{64}{s^3} + \frac{336}{s^2} + \frac{1162}{s}\right)$$

23

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[t - \left(7t^2 + 30\right)u(t-1)\right]$$

$$= \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}\left[\left(7(t-1)^2 + 14(t-1) + 37\right)u(t-1)\right]$$

$$= \mathcal{L}[t] - e^{-s}\mathcal{L}\left[7t^2 + 14t + 37\right]$$

$$= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(7\mathcal{L}\left[t^2\right] + 14\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[37]\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{14}{s^3} + \frac{14}{s^2} + \frac{37}{s}\right)$$

25

$$\mathcal{L}\left[\left(t^4 - 3t^2 + 2\right)u(t-9)\right] = \mathcal{L}\left[\left((t-9)^4 + 36(t-9)^3\right.\right.$$

$$\left.\left. + 483(t-9)^2 + 2862(t-9) + 6320\right)u(t-9)\right]$$

$$= e^{-9s}\mathcal{L}\left[t^4 + 36t^3 + 483t^2 + 2862t + 6320\right]$$

$$= e^{-9s}\left(\frac{24}{s^5} + \frac{216}{s^4} + \frac{966}{s^3} + \frac{2862}{s^2} + \frac{6320}{s}\right)$$

1

لدينا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4s+3}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2-1}\right]$$

$$=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right]=e^{2t}\sinh(t)$$

$$=e^{2t}\cdot\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{3t}-e^{t}\right)$$

3

لدينا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2-4}\right]=2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4}\right]=2\cosh(2t)$$

5

يمكن بسهولة اثبات أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+9}\right]=e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]=e^{3t}\cos(3t)$$

7

لدينا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+9}-\frac{1}{(s-3)^2}\right]=\frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]-e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\sin(3t) - e^{3t}t$$

9

لدينا

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2 - s - 2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-2)(s+1)}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s+1)}\right] = \frac{4}{3}\left(\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right)$$

11

نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-2)^2 + 2(s-2) + 1}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2 - 2s + 1}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s-1)-2}{(s-1)^2}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)}\right] - 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$$

$$= e^t - 2e^t \cdot \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = e^t - 2te^t$$

13

نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+1}{(s-1)(s^2+2)}\right]=\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2}\right]$$

$$=\frac{2}{3}e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right]+\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right]$$

$$=\frac{2}{3}e^t+\frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{2}t\right)+\frac{1}{3\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2}t\right)$$

15

لدينا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-4s}F(s)\right]=u(t-4)f(t-4)$$

حيث

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=e^{-2t}$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+2}\right]=u(t-4)e^{-2(t-4)}$$

17

لدينا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\left(\frac{s+2}{s^2-4s+8}\right)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}F(s)\right]$$

$$= u(t-2)f(t-2)$$

حيث

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2-4s+8}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2+4}{(s-2)^2+4}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s-2)^2+4}\right]$$

$$= e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + 2e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]$$

$$= e^{2t}\cos(2t) + 2e^{2t}\sin(2t)$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\left(\frac{s+2}{s^2-4s+8}\right)\right]$$

$$= e^{2(t-2)}u(t-2)\big(\cos(2t-4) + 2\sin(2t-4)\big)$$

19

نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-5s}\left(\frac{2s+1}{s^2-3s+5}\right)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-5s}F(s)\right]$$

$$= u(t-5)f(t-5)$$

حيث

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s^2-3s+5}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2\left(s-\frac{3}{2}\right)+4}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}\right]$$

$$=2e^{\frac{3}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\frac{11}{4}}\right]+\frac{8}{\sqrt{11}}e^{\frac{3}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{s^2+\frac{11}{4}}\right]$$

$$=2e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)+\frac{8}{\sqrt{11}}e^{\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-5s}\left(\frac{2s+1}{s^2-3s+5}\right)\right]=2e^{\frac{3}{2}(t-5)}u(t-5)\times$$

$$\times\left(\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}(t-5)\right)+\frac{4}{\sqrt{11}}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}(t-5)\right)\right)$$

21

لدينا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-4}{(s-1)^4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)-2}{(s-1)^4}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^3}\right]-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s-1)^4}\right]$$

$$= e^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] - \frac{1}{3} e^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = e^t\left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)$$

23

نجد أن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-3s+2)e^{-2s}}{s^2-2s+6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}F(s)\right] = u(t-2)f(t-2)$$

حيث

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-3s+2)}{s^2-2s+6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-3(s-1)-1}{(s-1)^2+5}\right]$$

$$= -3e^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+5}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}} e^t \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{s^2+5}\right]$$

$$= -3e^t \cos\left(\sqrt{5}t\right) - \frac{e^t}{\sqrt{5}} \sin\left(\sqrt{5}t\right)$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-3s+2)e^{-2s}}{s^2-2s+6}\right] = e^{t-2}u(t-2) \times$$

$$\times\left(-3\cos\left(\sqrt{5}(t-2)\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{5}(t-2)\right)\right)$$

25

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{2s^2+3s-4}{(s-3)(s^2+4)^2}=\frac{23}{169}\frac{1}{s-3}-\frac{23}{169}\frac{s+3}{s^2+4}+\frac{3}{13}\frac{s+16}{(s^2+4)^2}$$

وبالتالي فإن

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+3s-4}{(s-3)(s^2+4)^2}\right]=\frac{23}{169}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$-\frac{23}{169}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{s^2+4}\right]+\frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+16}{(s^2+4)^2}\right]$$

$$=\frac{23}{169}\left(e^{3t}-\cos(2t)-\frac{3}{2}\sin(2t)\right)+\frac{3}{13}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+16}{(s^2+4)^2}\right]$$

ولحساب

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+16}{(s^2+4)^2}\right]$$

نستخدم طريقة هيفيسايد. بما أن المقام عامل من الدرجة الثانية، والمكرر مرتين حيث $a=0,\ b=2$، إذاً فإن

$$H(s)=s+16,\quad H'(s)=1$$

$$H(a+ib)=H(2i)=2i+16$$

وبالتالي فإن

$$\alpha_{\mathrm{Im}} = 2 \quad \& \quad \alpha_{\mathrm{Re}} = 16$$

$$\delta_{\mathrm{Im}} = 0 \quad \& \quad \delta_{\mathrm{Re}} = 1$$

وهكذا نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+16}{\left(s^2+4\right)^2}\right] = \frac{1}{2\cdot 2^3}(2\cdot 2-1)e^{0t}\cos(2t) + \frac{1}{2\cdot 2^3}\times$$

$$\times(2\cdot 0-16)e^{0t}\sin(2t) + \frac{t}{2\cdot 2^3}(2\sin(2t)-16\cos(2t))e^{0t}$$

$$= \frac{3}{16}\cos(2t) - \sin(2t) + \frac{t}{16}(2\sin(2t)-16\cos(2t))$$

إذاً

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s^2+3s-4}{(s-3)\left(s^2+4\right)^2}\right] = \frac{23}{169}\left(e^{3t} - \cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)\right)$$

$$+\frac{3}{13}\left(\frac{3}{16}\cos(2t) - \sin(2t) + \frac{t}{16}(2\sin(2t)-16\cos(2t))\right)$$

27

لدينا

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s\left(s^2+9\right)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-5s}F(s)\right] = u(t-5)f(t-5)$$

حيث

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+9\right)}\right]=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{\left(s^2+9\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+9\right)}\right]=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cos(3t)$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s\left(s^2+9\right)}\right]=\frac{1}{9}u(t-5)\left(1-\cos(3(t-5))\right)$$

29

لدينا

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2-4s+19}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+15}\right]$$

$$=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+15}\right]=e^{2t}\cos\left(\sqrt{15}t\right)$$

31

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{8s^3-3s+2}{s^4-3s^3-20s^2+84s-80}=\frac{8s^3-3s+2}{(s-2)^2(s-4)(s-5)}$$

$$= -\frac{7209}{882}\frac{1}{s-2} - \frac{30}{7}\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{251}{18}\frac{1}{s-4} + \frac{983}{441}\frac{1}{s+5}$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8s^3 - 3s + 2}{s^4 - 3s^3 - 20s^2 + 84s - 80}\right]$$

$$= -\frac{7209}{882}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \frac{30}{7}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]$$

$$+\frac{251}{18}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] + \frac{983}{441}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] = -\frac{7209}{882}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$-\frac{30}{7}e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{251}{18}e^{4t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{983}{441}e^{-5t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$= -\frac{7209}{882}e^{2t} - \frac{30}{7}e^{2t}t + \frac{251}{18}e^{4t} + \frac{983}{441}e^{-5t}$$

33

بالنسبة للعامل $(s+7)$ حيث $a=-7$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{P(-7)}{Q'(-7)}e^{-7t} = -\frac{10}{53}e^{-7t}$$

بالنسبة للعامل $s^2+4=(s-0)^2+2^2$ حيث $a=0,\ b=2$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{1}{b}\left[\alpha_{\text{Im}}\cos(bt)+\alpha_{\text{Re}}\sin(bt)\right]$$

بما أن

$$H(s)=\frac{s-3}{s+7}$$

إذاً فإن

$$H(a+bi)=H(2i)=\frac{2i-3}{2i+7}=-\frac{17}{53}+\frac{20}{53}i$$

وبالتالي فإن $\alpha_{\text{Im}}=\frac{20}{53},\ \alpha_{\text{Re}}=-\frac{17}{53}$ وتحتوي الدالة $f(t)$ على الحد $\frac{1}{2}\left[\frac{20}{53}\cos(2t)-\frac{17}{53}\sin(2t)\right]$ وهكذا نجد أن

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s+7)(s^2+4)}\right]=\frac{10}{53}\cos(2t)-\frac{17}{106}\sin(2t)-\frac{10}{53}e^{-7t}$$

35

بالنسبة للعامل $(s-1)$ حيث $a=1$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{P(1)}{Q'(1)}e^{t}=-\frac{1}{9}e^{t}$$

بالنسبة للعامل $(s+2)^2$ حيث $k=2,\ a=-2$ ولأن

$$H(s)=\frac{3s-4}{s-1},\quad H'(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$$

فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\left(\frac{H'(-2)}{1!}+\frac{H(-2)}{1!}t\right)e^{-2t}=\left(\frac{1}{9}+\frac{10}{3}t\right)e^{-2t}$$

وبالتالي فإن

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-4}{(s-1)(s+2)^2}\right]=-\frac{1}{9}e^{t}+\left[\frac{1}{9}+\frac{10}{3}t\right]e^{-2t}$$

37

بالنسبة للعامل $(s+4)^2$ حيث $k=2,\ a=-4$ ولأن

$$H(s)=\frac{-3s-2}{1},\quad H'(s)=-3$$

فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\left[\frac{H'(-4)}{1!}+\frac{H(-4)}{1!}t\right]e^{-4t}=[-3+10t]e^{-4t}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-3s-2}{(s+4)^2}\right]=[-3+10t]e^{-4t}$$

39

بالنسبة للعامل $(s-5)$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{P(5)}{Q'(5)}e^{5t} = -5e^{5t}$$

بالنسبة للعامل $(s-4)^2$ حيث $k=2, a=4$ ولأن

$$H(s) = \frac{-s}{s-5}, \quad H'(s) = \frac{5}{(s-5)^2}$$

فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\left[\frac{H'(4)}{1!} + \frac{H(4)}{1!}t\right]e^{4t} = [5+4t]e^{4t}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-s}{(s-5)(s-4)^2}\right] = [5+4t]e^{4t} - 5e^{5t}$$

41

بالنسبة للعامل $(s+2)^2$ حيث $k=2, a=-2$ ولأن

$$H(s) = \frac{s^3}{(s+3)^2}, \quad H'(s) = \frac{s^2(s+9)}{(s+3)^3}$$

فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\left[\frac{H'(-2)}{1!}+\frac{H(-2)}{1!}t\right]e^{-2t}=(-28-8t)e^{-2t}$$

بالنسبة للعامل $(s+3)^2$ حيث $k=2, a=-3$ ولأن

$$H(s)=\frac{s^3}{(s+2)^2},\quad H'(s)=\frac{s^2(s+6)}{(s+2)^3}$$

فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\left[\frac{H'(-3)}{1!}+\frac{H(-3)}{1!}t\right]e^{-3t}=(-27-27t)e^{-3t}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^3}{(s+3)^2(s+2)^2}\right]=-(27+27t)e^{-3t}-(28+8t)e^{-2t}$$

43

بالنسبة للعامل $(s-2)^2$ حيث $k=2,\ a=2$ ولأن

$$H(s)=\frac{4}{(s+6)},\quad H'(s)=\frac{-4}{(s+6)^2}$$

فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\left[\frac{H'(2)}{1!}+\frac{H(2)}{1!}t\right]e^{2t}=\left[-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}t\right]e^{2t}$$

بالنسبة للعامل $(s+6)$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{P(-6)}{Q'(-6)}e^{-6t} = \frac{1}{16}e^{-6t}$$

إذاً

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+6)(s-2)^2}\right] = \left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}t\right)e^{2t} + \frac{1}{16}e^{-6t}$$

45

بالنسبة للعامل $(s-3)^2$ حيث $k = 2,\ a = 3$ ولأن

$$H(s) = \frac{-2s^2}{s+2},\quad H'(s) = \frac{-2s(s+4)}{(s+2)^2}$$

فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\left[\frac{H'(3)}{1!} + \frac{H(3)}{1!}t\right]e^{3t} = \left(-\frac{42}{25} - \frac{18}{5}t\right)e^{3t}$$

بالنسبة للعامل $(s+2)$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{P(-2)}{Q'(-2)}e^{-2t} = -\frac{8}{25}e^{-2t}$$

إذاً

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{-2s^2}{(s-3)^2(s+2)}\right] = -\frac{8}{25}e^{-2t} - \left(\frac{42}{25}+\frac{18}{5}t\right)e^{3t}$$

47

بالنسبة للعامل $(s+3)$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{P(-3)}{Q'(-3)}e^{-3t} = \frac{41}{7}e^{-3t}$$

بالنسبة للعامل

$$\left(s^2+3s+7\right) = \left(s+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$$

حيث $b = \frac{\sqrt{19}}{2}$, $a = -\frac{3}{2}$ فإن الدالة $f(t)$ تحتوي على الحد

$$\frac{1}{b}\left[\alpha_{\text{Im}}\cos(bt) + \alpha_{\text{Re}}\sin(bt)\right]e^{at}$$

بما أن

$$H(s) = \frac{4s^2+5}{(s+3)}$$

إذاً فإن

$$H(a+bi) = H\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}i\right) = \frac{-6\sqrt{19}i-5}{\frac{\sqrt{19}}{2}i+\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{129}{14} - \frac{13\sqrt{19}}{14}i$$

وبالتالي فإن $\alpha_{\text{Re}} = -\frac{129}{14}$, $\alpha_{\text{Im}} = -\frac{13\sqrt{19}}{14}$ وتحتوي الدالة $f(t)$ الحد

$$\frac{2}{\sqrt{19}}\left[-\frac{13\sqrt{19}}{14}\cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right) - \frac{129}{14}\sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)\right]e^{-\frac{3}{2}t}$$

إذاً

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s^2+5}{(s+3)(s^2+3s+7)}\right]=\frac{41}{7}e^{-3t}-\frac{13}{7}e^{-\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)$$

$$-\frac{129\sqrt{19}}{133}e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{19}}{2}t\right)$$

49

$$\mathcal{L}[y'']-6\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=0$$

$$s^2\mathcal{L}[y]-6s\mathcal{L}[y]-sy(0)-y'(0)+6y(0)+2\mathcal{L}[y]=0$$

$$s^2\mathcal{L}[y]-6s\mathcal{L}[y]+2\mathcal{L}[y]=s-3-6=s-9$$

$$\mathcal{L}[y]=\frac{s-9}{s^2-6s+2}=\frac{(s-3)-6}{(s-3)^2-7}\qquad\Rightarrow$$

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-3)-6}{(s-3)^2-7}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-3)}{(s-3)^2-(\sqrt{7})^2}\right]-\frac{6}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{7}}{(s-3)^2-(\sqrt{7})^2}\right]$$

$$=e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-(\sqrt{7})^2}\right]-\frac{6}{\sqrt{7}}e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{7}}{s^2-(\sqrt{7})^2}\right]$$

$$= e^{3t}\cosh\left(\sqrt{7}t\right) - \frac{6}{\sqrt{7}}e^{3t}\sinh\left(\sqrt{7}t\right)$$

51

$$\mathscr{L}\left[y''\right] - 3\mathscr{L}\left[y'\right] - 10\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}\left[e^{-t}\right]$$

$$s^2\mathscr{L}[y] - 3s\mathscr{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 3y(0) - 10\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}\left[e^{-t}\right]$$

$$s^2\mathscr{L}[y] - 3s\mathscr{L}[y] - 10\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s+1} + 2s - 4 - 6$$

$$= \frac{2s^2 - 8s - 10}{(s+1)}$$

$$\mathscr{L}[y] = \frac{2s^2 - 8s - 10}{(s+1)\left(s^2 - 3s - 10\right)}$$

بما أن

$$\frac{2s^2 - 8s - 10}{(s+1)\left(s^2 - 3s - 10\right)} = -\frac{\frac{1}{6}}{(s+1)} + \frac{\frac{1}{42}}{(s-5)} + \frac{\frac{15}{7}}{(s+2)}$$

إذاً

$$y = -\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] + \frac{1}{42}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-5}\right] + \frac{15}{7}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{42}e^{5t} + \frac{15}{7}e^{-2t}$$

53

$$\mathcal{L}[y''] + 6\mathcal{L}[y'] - 18\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-4t}]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] + 6s\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 6y(0) - 18\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-4t}]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] + 6s\mathcal{L}[y] - 18\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s+4} - 3s + 2 - 18$$

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{3s^2 + 28s + 63}{(s+4)(s^2 + 6s - 18)}$$

نضع

$$\frac{3s^2 + 28s + 63}{(s+4)(s^2 + 6s - 18)} = \frac{\frac{1}{26}}{s+4} + \frac{\frac{77}{26}s + \frac{207}{13}}{s^2 + 6s - 18}$$

$$= \frac{1}{26}\frac{1}{s+4} + \frac{\frac{77}{26}(s+3) + \frac{183}{26}}{(s+3)^2 - 27}$$

إذاً

$$y = \frac{1}{26}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \frac{77}{26}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+3)^2 - (\sqrt{27})^2}\right]$$

$$+ \frac{183}{26\sqrt{27}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{27}}{(s+3)^2 - (\sqrt{27})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{26} e^{-4t} + \frac{77}{26} e^{-3t} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 - \left(\sqrt{27}\right)^2}\right]$$

$$+ \frac{61}{26\sqrt{3}} e^{-3t} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{27}}{s^2 - \left(\sqrt{27}\right)^2}\right]$$

وهكذا نجد أن

$$y = \frac{1}{26} e^{-4t} + \frac{77}{26} e^{-3t} \cosh\left(\sqrt{27}t\right) + \frac{61}{26\sqrt{3}} e^{-3t} \sinh\left(\sqrt{27}t\right)$$

55

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] - 7\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[8]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] + 2s\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 2y(0) - 7\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[8]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] + 2s\mathcal{L}[y] - 7\mathcal{L}[y] = \frac{8}{s} + s + 2$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s^2 + 2s + 8}{s\left(s^2 + 2s - 7\right)}$$

بما أن

$$\frac{s^2 + s + 8}{s\left(s^2 + 2s - 7\right)} = -\frac{\frac{8}{7}}{s} + \frac{\frac{15}{7}(s+2)}{\left(s^2 + 2s - 7\right)}$$

$$y=-\frac{8}{7}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{15}{7}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2-(\sqrt{8})^2}\right]=-\frac{8}{7}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$+\frac{15}{7}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2-(\sqrt{8})^2}\right]+\frac{15}{7\sqrt{8}}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{8}}{(s+1)^2-(\sqrt{8})^2}\right]$$

$$=-\frac{8}{7}+\frac{15}{7}e^{-t}\left(\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-(\sqrt{8})^2}\right]+\frac{1}{\sqrt{8}}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{8}}{s^2-(\sqrt{8})^2}\right]\right)$$

إذاً

$$y=-\frac{8}{7}+\frac{15}{7}e^{-t}\left(\cosh(\sqrt{8}t)+\frac{1}{\sqrt{8}}\sinh(\sqrt{8}t)\right)$$

57

$$\mathscr{L}[y'']-6\mathscr{L}[y']+9\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[1]$$

أو

$$s^2\mathscr{L}[y]-sy(0)-y'(0)-6s\mathscr{L}[y]+6y(0)+9\mathscr{L}[y]=\mathscr{L}[1]$$

وبالتالي فإن

$$s^2\mathscr{L}[y]-6s\mathscr{L}[y]+9\mathscr{L}[y]=\frac{1}{s}+s-8$$

أو

$$\mathscr{L}[y]=\frac{1}{s(s-3)^2}+\frac{s-8}{(s-3)^2}$$

إذاً

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s^2-8s+1}{s(s-3)^2}\right)$$

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\frac{s^2-8s+1}{s(s-3)^2}=\frac{\frac{1}{9}}{s}+\frac{\frac{8}{9}}{s-3}-\frac{\frac{42}{9}}{(s-3)^2}$$

إذاً

$$y(t)=\frac{1}{9}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{8}{9}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)-\frac{42}{9}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}e^{3t}-\frac{42}{9}\mathscr{L}^{-1}\left(F(s-3)\right)$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}e^{3t}-\frac{42}{9}e^{3t}f(t)$$

حيث

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t$$

وهكذا نجد أن

$$y(t)=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}e^{3t}-\frac{42}{9}te^{3t}$$

59

$$\mathscr{L}[y''']-3\mathscr{L}[y'']+4\mathscr{L}[y']-16\mathscr{L}[y]=2\mathscr{L}[u(t-3)]$$

$$s^3\mathscr{L}[y]-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)-3s^2\mathscr{L}[y]+3sy(0)$$

$$+3y'(0)+4s\mathcal{L}[y]-4y(0)-16\mathcal{L}[y]=e^{-3s}\frac{2}{s}$$

$$s^3\mathcal{L}[y]-3s^2\mathcal{L}[y]+4s\mathcal{L}[y]-16\mathcal{L}[y]=e^{-3s}\frac{2}{s}-s^2+2s-1$$

$$\mathcal{L}[y]=e^{-3s}\frac{2}{s\left(s^3-3s^2+4s-16\right)}-\frac{s^2-2s+1}{s^3-3s^2+4s-16}$$

$$=\frac{\frac{2}{s}e^{-3s}-(s-1)^2}{s^3-3s^2+4s-16}$$

61

$$\mathcal{L}\left[y^{(4)}\right]+12\mathcal{L}\left[y'''\right]-2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[1]$$

$$s^4\mathcal{L}[y]-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)+12s^3\mathcal{L}[y]$$

$$-12s^2y(0)-12sy'(0)-12y''(0)-2\mathcal{L}[y]=\frac{1}{s}$$

$$s^4\mathcal{L}[y]+12s^3\mathcal{L}[y]-2\mathcal{L}[y]=\frac{1}{s}-4s^3-47s^2+12s$$

$$\mathcal{L}[y]=\frac{1}{s\left(s^4+12s^3-2\right)}-\frac{4s^3+47s^2-12s}{s^4+12s^3-2}$$

62

$$\mathcal{L}[y'']-2\mathcal{L}[y']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[t]$$

$$s^2\mathcal{L}[y]-2s\mathcal{L}[y]-sy(0)-y'(0)+2y(0)+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[t]$$

$$s^2\mathscr{L}[y] - 2s\mathscr{L}[y] + \mathscr{L}[y] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathscr{L}[y] = \frac{1}{s^2\left(s^2 - 2s + 1\right)} = \frac{1}{s^2(s-1)^2}$$

بما أن

$$\frac{1}{s^2(s-1)^2} = 2\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - 2\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

إذاً فإن

$$y = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - 2e^t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + e^t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$= 2 + t - 2e^t + e^t t$$

****

1

النقطة $x = 0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية. إذاً نفرض الحل على الشكل $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. بالتفاضل نحصل على

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

وبالتالي فإن

$$(2c_2 + c_0)x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 0$$

إذاً

$$(2c_2 + c_0)x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{n+2}(n+2)(n+1) + n c_n + c_n\right) x^n = 0$$

وبمقارنة معاملات قوى x نجد أن

$$x^0 : 2c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}c_0 \ ;$$

$$x^n : c_{n+2}(n+2)(n+1) + nc_n + c_n = 0$$

الصورة الاختزالية هي

$$c_{n+2} = -\frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n = -\frac{1}{n+2}c_n; \quad n \geq 1$$

إذاً

$$c_3 = -\frac{1}{3}c_1; \quad c_5 = -\frac{1}{5}c_3 = -\frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{3}c_1\right) = \frac{1}{5 \times 3}c_1 \ ;$$

$$c_7 = -\frac{1}{7}c_5 = -\frac{1}{7} \times \frac{1}{5 \times 3}c_1 = -\frac{1}{7 \times 5 \times 3}c_1$$

وهكذا نجد أن

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}c_1 \qquad k \geq 1$$

أو

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} \times \frac{2^k k!}{2^k k!}c_1 \qquad k \geq 1$$

عندئذ فإن

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!}c_1 \qquad k \geq 1$$

وأيضاً فإن

$$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 \quad -\frac{1}{4}\times -\frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{4\times 2}c_0 = \frac{1}{2^2(2\times 1)}c_0;$$

$$c_6 = -\frac{1}{6}c_4 = -\frac{1}{6}\times \frac{1}{2^2(2\times 1)}c_0 = -\frac{1}{2^3(3\times 2\times 1)}c_0$$

إذاً فإن

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k\, k!}c_0 \qquad k \geq 1$$

وبالتالي فإن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1}$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1}$$

وبما أنه من المعروف أن

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k\, k!} = 1 \;;\; k = 0;$$

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k\, 2^k\, k!}{(2k+1)!} = 1 \quad for \;\; k = 0$$

إذاً الحل المطلوب هو

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k\, k!}x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2^k\, k!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

3

النقطة $x=0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية. إذاً نفـرض الحـل على الشكل $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. بالتفاضل نحصل على

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=2}^{\infty}c_nn(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=0$$

إذاً

$$2c_2x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1}x^n=0$$

أي أن

$$2c_2x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)c_{n+2}+c_{n-1}\right)x^n=0$$

وهكذا نجد أن

$$x^0:\ 2c_2=0\ \Rightarrow\ c_2=0;$$

$$x^n:\ (n+2)(n+1)c_{n+2}+c_{n-1}=0$$

أو

$$c_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} c_{n-1}; \quad n \geq 1$$

ومنها نجد أن

$$c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} c_0; \; c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} c_1; \;\; c_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} c_2 = 0$$

$$c_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} c_3 = -\frac{1}{6 \cdot 5} \times -\frac{1}{3 \cdot 2} c_0 = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0$$

$$c_7 = -\frac{1}{7 \cdot 6} c_4 = -\frac{1}{7 \cdot 6} \times -\frac{1}{4 \cdot 3} c_1 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1$$

$$c_8 = -\frac{1}{8 \cdot 7} c_5 = 0$$

الشكل النوني للمعاملات هو

$$c_{3k} = \frac{(-1)^k c_0}{3^k k! [2 \cdot 5 \cdots (3k-1)]}; \quad k \geq 1$$

$$c_{3k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{3^k k! [4 \cdot 7 \cdots (3k+1)]}; \quad k \geq 1, \qquad c_{3k+2} = 0$$

بما أنه يمكن وضع الحل على الشكل

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{3k+2} x^{3k+2}$$

إذاً الحل هو

$$y = c_0\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{3^k k!(3k-1)!}\right\}$$

$$+c_1\left\{x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3^k k!(3k+1)!}\right\}$$

5

النقطة $x = 0$ هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية. إذاً نفـرض الحل على الشكل $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. بالتفاضل نحصل على

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1},\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

بالتعويض تتحول المعادلة المعطاة إلى

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أو

$$(-2c_2 + c_0)x^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n(n+1)c_{n+1}$$

$$-(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + c_n)x^n = 0$$

وبالتالي فإن

$$-2c_2 + c_0 = 0;$$

$$nc_{n+1} - (n+2)c_{n+2} + c_n = 0$$

حيث نحصل على

$$c_2 = \frac{c_0}{2};\ c_{n+2} = \frac{c_n + nc_{n+1}}{(n+2)};\ \ n \geq 1$$

وهكذا نجد أن

$$c_3 = \frac{c_2 + c_1}{3} = \frac{1}{3}\frac{c_0}{2} + \frac{1}{3}c_1 = \frac{1}{6}c_0 + \frac{1}{3}c_1$$

$$c_4 = \frac{2c_3 + c_2}{4} = \frac{5}{24}c_0 + \frac{1}{6}c_1$$

$$c_5 = \frac{3c_4 + c_3}{5} = \frac{19}{120}c_0 + \frac{1}{6}c_1, \ldots$$

الحل هو

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots$$

$$y = c_0\left\{\ 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{24} + \frac{19x^5}{120} + \cdots\right\}$$

$$+c_1\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{6}+\cdots\right\}$$

بما أن

$$y(0)=2=c_0,\ y'(0)=-1=c_1$$

إذاً

$$y=2-x+x^2+\frac{x^4}{4}+\frac{3x^5}{20}+\ldots$$

7

النقطة $x=0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية بسبب أن $P(x)=0$ تعني أن $x^2=0$. بما أن

$$(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=(x-0)\frac{-x(x-1)}{2x^2}=\frac{1-x}{2}\ ;$$

$$(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}=(x-0)^2\frac{-1}{2x^2}=\frac{-1}{2}$$

إذاً فإن $x=0$ هي نقطة شاذة منتظمة ونفرض حل فروبينياس *(Frobenius)* $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}$. بالتفاضل نحصل على

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-2}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1} x^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

إذاً

$$\left[(2r(r-1)+r-1)c_0\right]x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2(n+r)(n+r-1)c_n\right.$$
$$\left.-(n+r-1)c_{n-1} + (n+r)c_n - c_n\right)x^{n+r} = 0$$

معادلة التعريف هي

$$2r(r-1)+r-1=0$$

إذاً

$$(2r+1)(r-1)=0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{2}$$

ولأن $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ إذاً فحسب نظرية (9.5) الحالة الثانية يـأخذ الحـل الشكل (9.20). الصورة الاختزالية هي

$$2(n+r)(n+r-1)c_n - (n+r-1)c_{n-1} + (n+r-1)c_n = 0$$

أو

$$[2(n+r)+1](n+r-1)c_n = (n+r-1)c_{n-1}$$

حيث نجد أن

$$c_n = \frac{1}{2(n+r)+1}c_{n-1} \quad ; \quad n \geq 1$$

في حالة $r_1 = 1$ فإن

$$a_n = \frac{1}{2n+3}a_{n-1} \quad ; \quad n \geq 1$$

حيث نجد أن

$$a_1 = \frac{a_0}{5},\ a_2 = \frac{a_1}{7} = \frac{a_0}{7\cdot 5},\ a_3 = \frac{a_2}{9} = \frac{a_0}{9\cdot 7\cdot 5},\ldots$$

في حالة $r_2 = -\frac{1}{2}$ فإن

$$b_n = \frac{1}{2n}b_{n-1} \quad ; \quad n \geq 1$$

حيث نجد أن

$$b_1 = \frac{b_0}{2},\ b_2 = \frac{b_1}{4} = \frac{b_0}{4\cdot 2},\ b_3 = \frac{b_2}{6} = \frac{b_0}{6\cdot 4\cdot 2},\ldots$$

$$a_n = \frac{a_0}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} \qquad b_n = \frac{b_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \qquad n \geq 1$$

وهكذا نجد أن

$$a_n = \frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(2n+3)!}\,3a_0\,,\ b_n = \frac{1}{2^n\,n!}\,b_0;\quad n \geq 0$$

بفرض أن $3a_0 = 1,\ b_0 = 1$ نحصل على

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(2n+3)!} x^{n+1}\ ;$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n!} x^{n-\frac{1}{2}}$$

9

بسبب أن $P(x) = 0$ تعني أن $9x^2 = 0$ إذاً فإن النقطة $x = 0$ هـي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية. بما أن

$$(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = (x-0)\frac{3x}{9x^2} = \frac{1}{3}\ ;$$

$$(x - x_0)^2\,\frac{R(x)}{P(x)} = (x-0)^2\,\frac{2(x-4)}{9x^2} = \frac{2(x-4)}{9}$$

دوال تحليلية عند $x = 0$. إذاً نفرض حل فروبينياس

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

حيـث $0 < x < \infty$;$c_0 \neq 0$. بالتفـاضل والتعويـض فــي المعادلـــة المعطاة نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)c_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 8c_n x^{n+r} = 0$$

إذاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)c_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 8c_n x^{n+r} = 0$$

وبالتالي فإن

$$(9r(r-1)+3r-8)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \{9(n+r)(n+r-1)c_n$$

$$+[3(n+r)-8]c_n + 2c_{n-1}\} x^{n+r} = 0$$

معادلة التعريف هي $9r^2 - 6r - 8 = 0$. منها نجد أن

$$r_1 = \frac{4}{3},\ r_2 = -\frac{2}{3},\ r_1 - r_2 = 2$$

إذاً وحسب نظرية (9.5) الحالة الثانية فإن الحل المطلوب يأخذ الاشكال (9.21), (9.22). الصورة الاختزالية هي

$$(9(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-8)c_n + 2c_{n-1} = 0$$

أو

$$(3n+3r-4)(3n+3r+2)c_n + 2c_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

وبالتالي فإن

$$c_n = \frac{-2}{(3n+3r-4)(3n+3r+2)} c_{n-1} \qquad n \geq 1$$

عند $r_1 = \frac{4}{3}$ فإن

$$a_1 = \frac{-2a_0}{9 \cdot 1 \cdot 3};\ a_2 = \frac{-2a_1}{9 \cdot 2 \cdot 4};\ a_3 = \frac{-2a_2}{9 \cdot 3 \cdot 5};\ a_4 = \frac{-2a_3}{9 \cdot 4 \cdot 6};\ \cdots$$

$$a_n = \frac{-2a_{n-1}}{9n(n+2)}$$

إذاً

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n (2a_0)}{9^n (n)!(n+2)!} \qquad n \geq 0$$

بفرض $2c_0 = 1$ نجد من (9.21) أن

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{9^n (n)!(n+2)!} x^{n+\frac{4}{3}};\ 0 < x < \infty$$

بالنسبة للحل الثاني نجد أن

$$y_2 = Ay_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{2}{3}};\ b_0 \neq 0,\ 0 < x < \infty$$

وبالتفاضل نجد أن

$$y_2' = Ay_1' \ln(x) + \frac{Ay_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{2}{3}\right)b_n x^{n-\frac{5}{3}}$$

$$= Ay_1' \ln(x) + \frac{Ay_1}{x} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)b_n x^{n-\frac{5}{3}}$$

كما نجد أن

$$y_2'' = Ay_1'' \ln(x) + \frac{Ay_1'}{x} + \frac{Ay_1'}{x} - \frac{Ay_1}{x^2}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(n-\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{5}{3}\right)b_n x^{n-\frac{8}{3}} = Ay_1'' \ln(x) + \frac{2Ay_1'}{x} - \frac{Ay_1}{x^2}$$

$$+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)(3n-5)b_n x^{n-\frac{8}{3}}$$

نعوض عن y_2, y_2', y_2'' في المعادلة المعطاة فنحصل على

$$9x^2\left(Ay_1'' \ln(x) + \frac{2Ay_1'}{x} - \frac{Ay_1}{x^2}\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)(3n-5)b_n x^{n-\frac{2}{3}} + 3x\left(Ay_1' \ln(x) + \frac{Ay_1}{x}\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)b_n x^{n-\frac{2}{3}} + 2xAy_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty}2b_n x^{n+\frac{1}{3}}$$

$$-8Ay_1 \ln(x) - \sum_{n=0}^{\infty}8b_n x^{n-\frac{2}{3}} = 0$$

أو

$$A\left(9x^2y_1''+3xy_1'+2xy_1-8y_1\right)\ln(x)+9x^2\left(\frac{2Ay_1'}{x}-\frac{Ay_1}{x^2}\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)(3n-5)b_nx^{n-\frac{2}{3}}+3x\left(\frac{Ay_1}{x}\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)b_nx^{n-\frac{2}{3}}+\sum_{n=0}^{\infty}2b_nx^{n+\frac{1}{3}}-\sum_{n=0}^{\infty}8b_nx^{n-\frac{2}{3}}=0$$

وإذا أخذنا في الاعتبار أن $9x^2y_1''+3xy_1'+2xy_1-8y_1=0$.
عندئذٍ فإن

$$9x^2\left(\frac{2Ay_1'}{x}-\frac{Ay_1}{x^2}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)(3n-5)b_nx^{n-\frac{2}{3}}$$

$$+3x\left(\frac{Ay_1}{x}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}(3n-2)b_nx^{n-\frac{2}{3}}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}2b_nx^{n+\frac{1}{3}}-\sum_{n=0}^{\infty}8b_nx^{n-\frac{2}{3}}=0$$

وبالتعويض عن

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{9^n(n)!(n+2)!}x^{n+\frac{4}{3}}\ ;$$

$$y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{4}{3}\right)\frac{(-1)^n2^n}{9^n(n)!(n+2)!}\ x^{n+\frac{1}{3}}\ ;$$

$$y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{4}{3}\right)\left(n+\frac{1}{3}\right)\frac{(-1)^n 2^n}{9^n (n)!(n+2)!} \quad x^{n-\frac{2}{3}}$$

نجد أن

$$b_0 = 1,\ b_1 = \frac{2}{9},\ b_2 = 0,\ b_3 = -\frac{2^2 b_0}{9^2}$$

$$b_n = \frac{2}{9n(n-2)}\left[-b_{n-1} + \frac{(-1)^n 2^n (n-1) b_0}{9^{n-1}(n-2)!\,n!}\right] \qquad n \geq 3$$

بالتعويض يمكن الحصول على الحل الثاني y_2.

11

النقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة للمعادلة التفاضلية. بما أن

$$(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = (x-0)\frac{1}{x} = 1;$$

$$(x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} = (x-0)^2\frac{1}{x} = x$$

دالتان تحليليتان عند النقطة $x = 0$. إذاً نفرض حل فروبينياس

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

حيث $0 < x < \infty$, $c_0 \neq 0$. إذاً يمكن أن نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

أو

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)c_{n+1}x^{n+r}+\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)c_{n+1}x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

وبالتالي فإن

$$r(r-1)c_0x^{r-1}+rc_0x^{r-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+r+1)(n+r+1)c_{n+1}+c_n\right)x^{n+r}=0$$

أو

$$r^2c_0x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r+1)^2c_{n+1}+c_n\right]x^{n+r}=0$$

معادلة التعريف هي $r^2=0$. إذاً $r_1=r_2=\alpha=0$. ونحصل على الحل طبقاً لنظرية (9.5) الحالة الثالثة من المعادلات ,(9.23) (9.24). الصورة الاختزالية هي

$$(n+r+1)^2c_{n+1}+c_n=0\ ;\ n\geq 0$$

عند $r=0$ فإن

$$a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2} a_n \; ; \quad n \geq 0$$

وعندئذ

$$a_1 = \frac{-a_0}{1^2}; \quad a_2 = \frac{-a_1}{2^2} = \frac{1}{1^2 . 2^2} a_0;$$

$$a_3 = \frac{-a_2}{3^2} = \frac{-1}{1^2 . 2^2 . 3^2} a_0 \; ; \; \ldots$$

ومن ثم فإن

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(n!)^2} \qquad n \geq 0$$

وإذا أخذنا $a_0 = 1$ فإن

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$$

بما أن

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n + y_1 \ln(x)$$

إذاً

$$y_2' = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + \left(\frac{y_1}{x} + y_1' \ln(x) \right);$$

$$y_2'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2} + \left(\frac{-y_1}{x} + \frac{2y_1'}{x} + y_1'' \ln(x) \right)$$

إذاً بالتعويض عن y_2, y_2', y_2'' في المعادلة المعطاة مع ملاحظة أن $xy_1'' + y_1' + y_1 = 0$ ومع الأخذ في الاعتبار أن

$$y_1' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n-1}}{(n!)^2};$$

$$y_1'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1) x^{n-2}}{(n!)^2}$$

نجد أن

$$b_1 = 2,\ b_n = -\left[\frac{b_{n-1}}{n^2} + \frac{2(-1)^n}{n(n!)^2}\right];\quad n \geq 2$$

وهكذا يمكن الحصول على y_2.

****

إن الجامعة تتألف من
طالب حر .. وأستاذ حر ..
ومحبة المعرفة لا تفترق عن الأيمان



المراجـــــع

Bibliography

[1] ANTON, HOWARD (1977) *Elementary Linear Algebra*, Wiley, New York.

[2] BIRKHOFF, G., and G. ROTA (1978) *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York.

[3] BOYCE, W. E. and DIPRIMA, R. C. (1977) *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* Wiley, New York.

[4] CHURCHILL, R. V. (1972) *Operational Mathematics*, McGraw-Hill, New York.

[5] COLEMAN, T. F., and C. VANLOAN (1988) *Handbook for Matrix Computations*. SIAM Publications, Philadelphia.

[6] CURTIS, F. GERALD and PATRICK, O. WHEATLEY (1994) *Applied Numerical Analysis*, Addison - Wesley.

[7] DANILINA, N. I. and DUBROVSKAYA, N. S. and KVASHA, O. P. and SMIRNOV, G. L. (1988) *Computational Mathematics*, Mir Publishers, Moscow.

[8] GEAR, C. W. (1971) *Numerical Initial-Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.

[9] HAGEMAN, L. A., and D. M. YOUNG (1981) *Applied Iterative Methods*. Academic Press, New York.

[10] HAMMING, R. W. (1973) *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York.

[11] JAEGER, J. C. (1949) *An Introduction to the Laplace Transformation*, Wiley, New York.